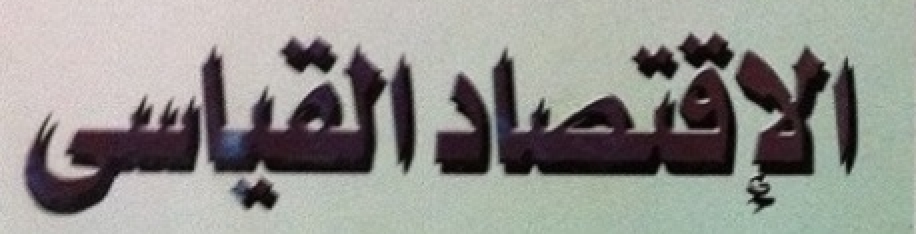


بين النظرية والتطبيق

دكتور / محمد محمود عطوة

قسم الإقتصاد - كلية التجارة
جامعة المنصورة

المكتبة العصرية - المنصورة
١٤٢٣هـ - ٢٠٠٢

الإقتصاد القياسى

بين النظرية والتطبيق

دكتور
محمد محمد عطوة يوسف
قسم الإقتصاد
كلية التجارة ـ جامعة المنصورة

المكتبة العصرية – المنصورة
1423 هـ ـ 2002

- **الإقتصاد القياسى**
بين النظرية والتطبيق

- الطبعة الأولى 2002

- الإعداد الفنى والكتابة والنشر
المكتبة العصرية 2221875 / 050
- رقم الإيداع بدار الكتب المصرية
2001/ 18649
- رقم الإيداع الدولى .I. S. B. N
977-6033-34-2



خواطر كاتب

اكتب بإيدك حلمك

ووعى حد فى يوم يحلملك

فاكر لحظات القوة فى عمرك

زى الظل بجانبك حلمك

واقع يتحقق فى بساطة فكرك



مقدمه الطبعة الأولى

يناقش هذا الكتاب أحد الإتجاهات الحديثة فى علم الإقتصاد، وهو ما يطلق عليه الإقتصاد القياسى، والذى يفسر الظواهر الإقتصادية من خلال قياس العلاقة بين متغيراتها باستخدام النماذج الإحصائية. وقد بدأت فكرة هذا الكتاب منذ ثلاث سنوات عندما قمت بتدريس مادة الإقتصاد القياسى للفرقة الرابعة شعبة الإقتصاد والإحصاء بكلية التجارة – جامعة المنصورة، وكان فى البداية عبارة عن مجموعة محاضرات قمت بإلقائها على طلابى بالإضافة إلى مناقشاتهم داخل قاعات التدريس، وقد تم تطويرها لتخرج بنظرية متكاملة عن الإقتصاد القياسى، مع إعطاء تطبيقات عملية للمشكلات التى تواجه أى باحث فى هذا المجال، بما يستفيد به الباحثين فى مراحل الدراسات العليا. إضافة إلى الأسلوب السهل الذى عرض به الكتاب. ولاشك أن أى جهد إنسانى لا يمكن أن يتسم بالكامل (الذى اختص الله به نفسه دون سائر كائناته)، لذلك هناك بعض النقص والذى سوف يستكمل فى الطبعات القادمة إنشاء الله.

ويرجو الكاتب من الله أن يوفقه إلى ذلك.

مع خالص تمنياتى بالتوفيق،،،

دكتور / محمد محمود عطوة

المنصورة فى يناير 2002

المحتويات

تابع المحتويات

الفصل الأول:
توصيف الإقتصاد القياسى

يتكون هذا الفصل من أربع أجزاء، حيث يتضمن الجزء الأول اد القياسى وعلاقته بالإحصاء والرياضة والنظرية الإقتصادية، ويتضمن الجزء الثانى تحديد لأهداف نظرية الإقتصاد القياسى من حيث التحليل ووضع السياسات، والتنبؤ. أما الجزء الثالث فيدرس فروع علم الإقتصاد القياسى، ونختم هذا الفصل بالجزء الرابع الذى يتناول فيه الكاتب منهجية البحث فى نظرية الإقتصاد القياسى.

1/1ـ تعريف الإقتصاد القياسى

كتب الإحصائى النرويجى رنجر فريتش Ranger Frisch – افتتاحية مجلة الإقتصاد القياسى عدد (1930) – مقالة يحدد فيها طبيعة الإقتصاد القياسى ومجاله. حيث ذكر أن الإقتصاد القياسى ليس هو الإحصاء القياسى، وهو أيضا لا يعنى النظرية الإقتصادية، كما يجب إلا ينظر إليه على أنه مرادف للإقتصاد الرياضى أو التطبيقات الرياضية فى الإقتصاد. فقد أظهرت التجربة أن كلا من هذه العلوم الثلاثة ضرورى – ولكن أيا منها لا يكون كافيا بمفرده– للفهم الحقيقى للعلاقات الكمية فى الإقتصاد.

وقد عرف ثلاثة من كبار الفكر القياسى – سامولسون Samuelson ، وكوبمانس Koopmans، وستون Stone الإقتصاد القياسى بأنه فرع من فروع علم الإقتصاد يستخدم التحليل الكمى للظواهر الإقتصادية، المبنى على أساس التماسك بين النظرية والمشاهدات متخذاً فى ذلك أساليب استدلال ملائمة.

وعرف الإقتصادى أوسكار لانكه Oskar Lange الإقتصاد القياسى بأنه العلم الذى يستعين بالطرق الاحصائية لتحديد فعل القوانين الإقتصادية الموضوعية تحديدا كميا فى العالم الإقتصادى الواقعى.

نستطيع من التعريفات السابقة أن نحدد مفهوم وطبيعة ومجال الإقتصاد القياسى كما يلى:

1- ينظر إلى الإقتصاد القياسى، باعتباره أحد الفروع الحديثة لعلم الإقتصاد الذى يهتم بالتحليل الكمى للظواهر الإقتصادية، أو باختصار قياس العلاقات الاقتصادية. وهذه هى الترجمة المباشرة لكلمة Econometrics.

2- يعتبر الاقتصاد القياسى نوع خاص من التحليل الإقتصادى الذى تمتزج فيه النظرية الإقتصادية بعد صياغتها صياغة رياضية مع القياس العملى للظواهر الإقتصادية عن طريق الأساليب الإحصائية.

ورغم تعدد تعريفات علم الإقتصاد القياسى، إلا أن جميعها تتفق على أن الإقتصاد القياسى هو العلم الذى يجمع بين النظرية الإقتصادية والرياضية والإحصاء، بهدف الحصول على القيم العددية لمعالم العلاقات الإقتصادية (مثل المرونات، والقيم الحدية) واختبار النظريات الإقتصادية والتحقق منها فى العالم الواقعى. معنى هذا أن الإقتصاد القياسى يهتم بصياغة وتقدير واختبار وتحليل النماذج الإقتصادية مستخدماً فى ذلك النظرية الإقتصادية والطرق الرياضية والإحصائية.

هذا وتشير التعريفات السابقة إلى أن الإقتصاد القياسى مزيج من النظرية الإقتصادية والرياضية والإحصائية، ورغم ذلك لا يمكن أن ننكر أن الإقتصاد القياسى له خصائصه الفريدة والتى تميزه عن غيره من العلوم الأخرى. ومن أهم الخصائص التى يتميز بها الإقتصاد القياسى عن الإقتصاد الرياضى هى إدخال ما يعرف باسم المتغير العشوائى فى النماذج القياسية. وهذا المتغير تتجاهله النظرية الإقتصادية و الإقتصاد الرياضى على حد سواء. ويمكن توضيح ذلك من خلال المثالين التاليين:-

المثال الأول:

تفترض النظرية الإقتصادية أن الطلب على سلعة ما- مع فرض ثبات أذواق المستهلكين خلال فترة الدراسة- يعتمد على سعرها وأسعار السلع البديلة والمكملة ودخل المستهلك. هذه العلاقة تتضمن أن الطلب على السلعة يتحدد كلية عن طريق هذه المتغيرات الثلاثة، وليست هناك عوامل أو متغيرات أخرى -غير ما ذكر- يكون له تأثير على الطلب. ويقوم الإقتصاد الرياضى بالتعبير عن العلاقة السابقة فى شكل رياضى سواء فى شكل ضمنى أو صريح كما يلى:

$$Q= F(P, P1, P2, P3, \ldots\ldots, Pn, Y)$$

أو

$$Qd= \alpha + \beta p + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \ldots + \beta_2 p_2 + B_y.y \qquad (1\text{-}1)$$

حيث أن:

Q الطلب من السلعة.

Q^d الكمية المطلوبة من السلعة.

P سعر الوحدة من السلعة

Yn دخل المستهلك

$P1.\ p2, \ldots\ldots pn$ أسعار السلع الأخرى (البديلة والمكملة)

α ، β_1 ، β_n .... β_2 ، β_1 ، β_y معلمات دالة الطلب.

ويفهم من معادلة الطلب السابقة، أن الكمية المطلوبة من السلعة يمكن أن تتغير فقط بتغير المتغيرات التى تظهر فى الجانب الأيمن من المعادلة رقم (1-1). وأنه لا يوجد أى متغير أو عامل آخر -غير المتغيرات السابقة- تؤثر

على الكمية المطلوبة. ومعنى هذا أن كلا من النظرية الإقتصادية والإقتصاد الرياضى يفترضان وجود علاقة كاملة (ودقيقة) بين المتغيرات الإقتصادية. هذه الصياغة الكاملة (الدقيقة) للعلاقات الإقتصادية لا تصلح لأغراض القياس والاختبار الإحصائى، فضلا عن تجاهلها لعدد هام من الاعتبارات العملية، حيث أن:-

1- لا يمكن التسليم بأن سعر السلعة وأسعار السلع الأخرى (البديلة أو المكملة) ودخل المستهلك هى العوامل الوحيدة المحددة للكمية المطلوبة من السلعة. ورغم أنها أهم المتغيرات التى تؤثر عليها (الكمية المطلوبة)، لكن هناك متغيرات أخرى ... مثل الأذواق والميول والرغبات، حجم العائلة "عدد السكان" والعادات الشرائية... الخ- لها تأثيرها على الكمية المطلوبة قد أهملت فى العلاقة السابقة (1-1).

2- قد يرجع الإختلاف فى مستويات الكمية المطلوبة - بالرغم من ثبات الأسعار والدخل - إلى وجود عنصر (متغير) عشوائى فى السلوك الإقتصادى للإنسان، والذى قد يؤثر فيه الإشاعات والميول والعادات والعوامل النفسية ....الخ.

3- إذا فرضنا أن العلاقة الإقتصادية النظرية كاملة (دقيقة)، لا يمكن افتراض ذلك للعلاقة التى نحاول الحصول عليها من البيانات المتاحة، والتى غالبا ما تحتوى على أخطاء ناتجة عن عدم دقة الملاحظة أو القياس.

4- لا تقدم النظرية الاقتصادية معلومات دقيقة عن شكل العلاقة الرياضية، خطية أو غير خطية.

5- قد يقوم الباحث بتقدير العلاقة الاقتصادية باستخدام معادلة واحدة لتفسير ظاهرة معينة، فى حين أننا نحتاج إلى مجموعة معادلات آنية لتقدير وتفسير العلاقة السابقة.

هذا ويأتى دور الاقتصاد القياسى الذى يأخذ فى الاعتبار كـل العوامـل السابقة، والتى تجعل من غير الممكن افتراض وجود علاقة كاملة فى المجال الإقتصادى، وذلك بإدخال أو إضافة متغير عشوائى فى العلاقة المراد قياسها. وبذلك تكون دالة الطلب فى صيغتها العشوائية (القياسية) كما يلى:-

$$Q = F(P, P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots\ldots P_n, Y) + \mu \qquad (1\text{-}2)$$

أو

$$Q^d = \alpha + \beta p + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \ldots + \beta_2 p_2 + B_n . y_n + B_y . y + N$$

حيث أن μ متغير عشوائى له خصـائص احتماليـة، ويعبـر عـن الاعتبارات الآتية:-

1- حذف أو استبعاد بعض المتغيرات ذات التأثير على المتغير التابع.

2- الجزء غير المنظم أو العشوائى فى السلوك الإقتصادى للإنسان.

3- أخطاء القياس والمشاهدات.

4- أخطاء توصيف أو صياغة النموذج.

5- أخطاء التجميع.

وهذا يعنى أنه حتى يمكن الحصول على تقديرات لمعلمات النمـوذج α ، β_1 ، β_2، ... ، β_n ، β_y ، فإنه لابد من تحويل العلاقة الكاملة فى المعادلة رقم (1-1) إلى العلاقة الاحصائية الإحتمالية بإضافة المتغير العشوائى μ.

وتجدر الإشارة إلى أن مجموع مربعات البواقى هو تقدير للخطاء العشوائى.

المثال الثانى:

تقرر النظرية الإقتصادية أن استهلاك الأسرة يتوقف على مستوى الدخل الممكن التصرف فيه، ويعبر عن ذلك رياضيا كما يلى:

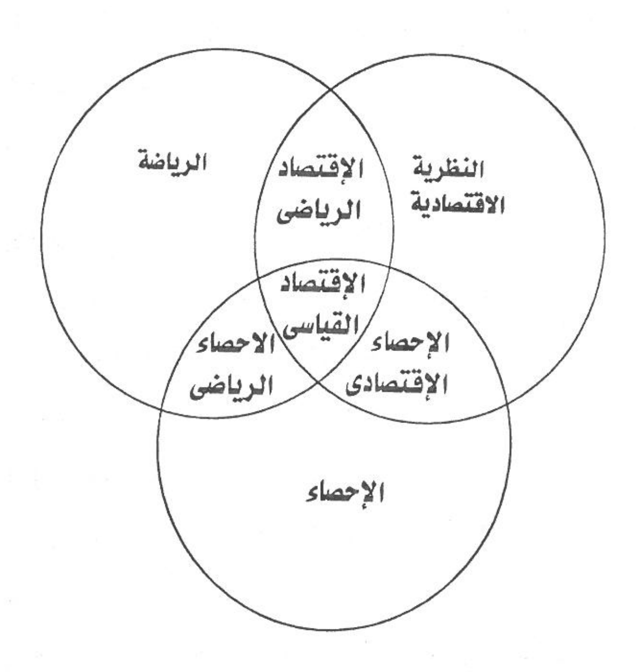
$$\left.\begin{array}{l} Ci=F(Yi) \\ \qquad\qquad \text{أو} \\ Ci=\alpha+\beta_y+\beta_y.Y_i \end{array}\right\} \qquad (1\text{-}3)$$

ويلاحظ أننا افترضlk أن هناك علاقة خطية بين الإنفاق الإستهلاكى Ci ومستوى الدخل الممكن التصرف فيه Yi ، وأن معلمات (ثوابت) دالة الإستهلاك $\alpha \times \beta_y$. وهذه العلاقة كاملة بين الدخل الممكن التصرف فيه (Y_i) والإستهلاك (Ci). وتواجه الدالة رقم (3-1) بالخمس عوامل السابقة، ولتحويلها إلى علاقة احتمالية أو إحصائية لابد من إضافة المتغير العشوائى الذى يحتوى على العوامل السابقة. وفى هذه الحالة تصبح العلاقة القياسية كما يلى:-

$$\left.\begin{array}{l} Ci=F(Yi)+ui \\ \qquad\qquad \text{أو} \\ Ci=\alpha+\beta_y+\beta_y.\,y_i+ui \end{array}\right\} \qquad (1\text{-}4)$$

ومن العرض السابق يمكن تحديد علاقة الإقتصاد القياسى بالنظرية الإقتصادية والرياضية والإحصائية وتوصيفه بشكل واضح، من خلال الشكل رقم (1-1).

شكل رقم (1-1)
يحدد علاقة الإقتصاد القياسى بالنظرية
الإقتصادية والرياضية والإحصائية



2/1ـ ثلاثة أهداف لنظرية الإقتصاد القياسى:

هناك ثلاثة أهداف رئيسية تسعى نظرية الإقتصاد القياسى لتحقيقها:-

1/2/1ـ التحليل:-

ونعنى بالتحليل محاولة الإقتصاد القياسى اختبار النظرية الإقتصادية، وذلك عن طريق محاولة الحصول على الدليل العملى لاختبار القدرة التفسيرية للنظريات الإقتصادية، ولتقرير مدى شرح هذه النظريات للسلوك الفعلى للوحدات الاقتصادية.

2/2/1ـ وضع السياسات:

ونعنى بذلك محاولة الإقتصاد القياسى الحصول على تقديرات صحيحة لمعالم العلاقات الإقتصادية، والتى يمكن استخدامها فى اتخاذ القرارات ووضع السياسات الإقتصادية. ومن أمثلة هذه العلاقات التى يجب تقدير معالمها لتحديد السياسات الإقتصادية الملائمة:-

(1) تأثير الزيادة فى عجز الموازنة العامة على معدل أسعار الفائدة ومعدل التضخم.

(2) ما هى العلاقة بين مستوى معدل الفائدة ومستوى مؤشر دون جونسون الصناعى؟

(3) كيف يمكن أن يكون الإندماج والإتحاد بين المنشآت قوة فعالة للتأثير على عوائد الأوراق المالية؟

(4) كيف يؤثر العجز التجارى على مستوى التوظف؟

(5) ما هى العلاقة بين كمية النقود، بفرض أنها M_1 ، ومستوى النشاط الإقتصادي؟

(6) ما أثر رفع البنك المركزى لسعر الخصم على ظاهرة الركود التضخمى Stagflation؟

(7) ما هى آثار تغير قانون الضرائب على توزيع الدخل؟

(8) هل مستوى الرخاء الإقتصادى Economic Well-being يؤثر على أنواع الجريمة التى تحدث فى المدن؟

وتجدر الإشارة إلى أن التقدير الصحيح للعلاقات بين المتغيرات السابقة، يعنى سياسات إقتصادية، أكثر قدرة على العلاج والتصحيح. وهذا ما يحاول الإقتصاد القياسى صنعه.

3/2/1ـ التنبؤ:

ونعنى بذلك استخدام الاقتصاد القياسى للتقديرات المتحصل عليها لمعلمات العلاقات الاقتصادية، فى التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغيرات الاقتصادية.

والتطبيقات الناجحة فى الإقتصاد القياسى، هى تلك التى تسعى إلى تحقيق الأهداف الثلاثة، من تحليل للنظرية وتقدير للمعالم والتنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغيرات الإقتصادية.

3/1ـ فرع الإقتصاد القياسى:

يمكن التمييز بين فرعين لعلم الإقتصاد القياسى:-

1ـ الإقتصاد القياسى النظرى:

عبارة عن ذلك الفرع من علم الإقتصاد القياسى، الذى يختص بتطوير طرق أو أساليب إحصائية لقياس العلاقات الإقتصادية التى يتم توصيفها عن طريق النماذج القياسية.

ويعتمد الإقتصاد القياسى فى هذا المجال بشكل كبير على الإحصاء الرياضى.

مثال ذلك دراسة طريقة المربعات الصغرى وفروضها، والآثار المترتبة على عدم توافر فرض أو أكثر من فروضها.

2. الإقتصاد القياسى التطبيقى:

وهو عبارة عن ذلك الفرع من علم الإقتصاد القياسى، الذى تطبق فيه أساليب الإقتصاد القياسى فى مجالات محددة من مجالات النظرية الإقتصادية. مثال دوال الطلب والعرض والإنتاج والإستهلاك والاستثمار. والهدف هنا هو قياس العلاقات الإقتصادية فى مجال من هذه المجالات، واختبار مدى الاتفاق بين النظرية والواقع ومحاولة الحصول على تنبؤات خاصة بتطور الظاهرة فى المستقبل.

1 / 4. منهجية البحث فى الإقتصاد القياسى

يجب أن يعرف الباحث – فى مجال الإقتصاد القياسى – فكرة مبسطة عن منهج البحث القياسى التطبيقى (اقتصاد تطبيقى بإستخدام أساليب الإقتصاد القياسى). وبصفة عامة هناك اربع خطوات للبحث فى الإقتصاد القياسى التطبيقى.

1. الخطوة الأولى: توصيف النموذج

تعتبر أهم الخطوات حيث يعتمد عليها الخطوات التالية. ويتطلب توصيف أو صياغة النموذج، تحديد الظاهرة المراد تفسيرها والعوامل التى يمكن أن تساعد على تفسير سلوكها. ويحاول الباحث القياسى فى هذه المرحلة دراسة العلاقة بين المتغيرات المختلفة عن هذه العلاقة فى صورة رياضية. وهذا ما نعنيه بتوصيف النموذج، الذى يتم عن طريقه بحث الظاهرة محل

الدراسة تطبيقيا. ويعتمد توصيف النموذج على النظرية الإقتصادية وعلى كل ما يتوفر لدينا من معلومات عن الظاهرة محل الدراسة، وتتضمن عملية التوصيف على ما يلى:

(1)- تحديد المتغير التابع والمتغير أو المتغيرات المستقلة (المتغيرات التفسيرية).

(2)- **معرفة التوقعات النظرية لما يمكن أن تكون عليه إشارات وقيم معالم الدوال، والتى يتم على أساسها تقييم التقديرات المتحصلة عليها لمعالم النموذج.**

(3)- تحديد الشكل الرياضى للنموذج، من حيث عدد المعادلات التى يحتوى عليها وكونها خطية أو غير خطية.

(4)- تحويل النموذج الرياضى إلى نموذج إحصائى أو إحتمالى (عشوائى) وذلك بإدخال العنصر أو المتغير العشوائى.

ويمكن عرض خطوات التوصيف السابقة من خلال مثال بسيط عن دالة الإستهلاك. هذه الدالة تجد أساسها النظرى فى النظرية الكينزية، والتى تعتبر **أن الإستهلاك الكلى (متغير تابع) دالة فى الدخل الممكن التصرف فيه (متغير مستقل)، ويمكن صياغة الدالة رياضيا كما يلى:**

$$Ct = f(Y_t) \qquad (1\text{-}5)$$

حيث أن:

C_t الإستهلاك الكلى خلال فترة زمنية.

Y_t الدخل الممكن التصرف فيه خلال نفس الفترة لزمنية

t الزمن.

إلا أنه يلاحظ أن السكان والمستوى العام للاسعار يؤثروا فى الإستهلاك الكلى، لذلك يجب أخذهم فى الاعتبار كمتغيرات داخلة فى النموذج. ويمكن إعادة صياغة الدالة رياضيا كما يلى:

$$Ct = f(Y_t, N_t, P_t)...... \quad (1\text{-}6)$$

ويشير الرمز N_t إلى عدد السكان، بينما الرمز P_t إلى الرقم القياسى للأسعار. هذا ويمكن الاستعانة ببعض الدراسات التطبيقية التى تمت فى مجال الإستهلاك، فبعض الدراسات السابقة، تشير إلى أن الإستهلاك الجارى لا يتوقف فقط على الدخل الجارى، وإنما يمكن أن يتأثر بمستويات الدخول التى تم الحصول عليها فى الفترات السابقة، وفى هذه الحالة يصبح النموذج كما يلى:-

$$Ct = f(Y_t, y_{t-1}, \ldots\ldots, Y_{t-n}, N_t, P_t)............. \quad (1\text{-}7)$$

كما تشير بعض الدراسات السابقة أيضا، إلى أن الإستهلاك الجارى يعتمد على الإستهلاك فى الفترة الزمنية السابقة، أى أن دالة الإستهلاك الكلى يمكن كتابتها كما يلى:-

$$Ct = f(Y_t, y_{t-n}, C_{t-n}, N_t, P_t) .... \quad (1\text{-}8)$$

وتجدر الإشارة إلى أننا كتبنا دالة الإستهلاك فى صورتها العامة لكن من الضرورى فى حالة قياس أية علاقة، يجب أن تأخذ شكلا رياضيا محدداً. وعادة لا تقدم لنا النظرية الإقتصادية معلومات كافية بشأن طبيعة الدوال (مثلا خطية أو غير خطية). ولا شك أن لكل صورة رياضية نفترضها للدالة نتائج محددة. لذلك يكون من الضرورى محاولة تحديد الشكل المناسب للعلاقة الإقتصادية. ويمكن الاستعانة بشكل الإنتشار فى تحديد شكل العلاقة بين متغيرين، وما إذا كانت خط مستقيم أو منحنى، كما يمكن أن نلجأ إلى تجربة

الصيغ المختلفة على البيانات، لاختيار أفضلها من واقع القوة التفسيرية للنموذج، إلى جانب المبررات النظرية.

ومن الجدير بالذكر ونحن بصدد تحديد الشكل الرياضى للعلاقة الإقتصادية، يمكن أن تقدم لنا النظرية الإحصائية بعض المعايير التى يستعان بها فى الاختيار بين النماذج المختلفة. ومن أمثلة ذلك ما يعرف باسم الاختبارات المشتقة، والاختبارات غير المشتقة، Nested and Non-Nested Tests.

يأتى بعد ذلك تحديد الشكل الرياضى للعلاقة الإقتصادية، تحديد عدد المعادلات المستخدمة، فبعض الظواهر التى يعبر عنها بمعادلة واحدة، قد يكون فيه قدر كبير من الخطأ، بل يكون من المناسب تفسير الظاهرة عن طريق عدد من العلاقات أو المعادلات التى تتفاعل سويا لتحديدها.

هذا ولا تقرر النظرية الإقتصادية -دائما- بطريقة صريحة عدد المعادلات التى تكفى لتفسير ظاهرة من الظواهر. وإذا نظرنا للمثال السابق الخاص بدالة الإستهلاك الكلى، ونلاحظ أن النظرية الإقتصادية لم تشير إلى عدد المعادلات التى يجب استخدامها للتعبير عن ظاهرة الدراسة. وقد تم التعبير عنها فى شكل معادلة رياضية واحدة. فى حين أن النظرة المتأنية والمتعمقة للعلاقة محل الدراسة، قد تكشف عن الحاجة لنموذج ذى علاقات أو معادلات متعددة. كأن تنظر مثلا إلى معادلة الإستهلاك السابقة على أنها واحدة فى نموذج يتكون من عدة معادلات Simultaneous Equation models. ويمكن القول أن تحديد عدد المعادلات التى يتكون منها النموذج له دور كبير فى اختيار طريقة التقدير المناسبة لمعلمات النموذج، ومن ثم مدى الاطمئنان إلى جودة وسلامة التقديرات المتحصل عليها.

أما من حيث التوقعات النظرية لما يمكن أن تكون عليه إشارات وقيم المعالم، تلعب النظرية الإقتصادية دور كبير فى ذلك، وعلى سبيل المثال بفرض أن دالة الإستهلاك كما فى العلاقة رقم (1-5) أمكن التعبير عنها كما يلى:-

$$Ct = \alpha + \beta_y Y_t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1\text{-}9)$$

فمن المعروف وفقا للنظرية الإقتصادية

$$\alpha > 0 \ , \quad 1 > \beta > 0$$

مثل هذه التوقعات تساعد الباحث كثيراً، فوفقا لها يتم تقييم التقديرات المتحصل عليها من النموذج.

وأخيراً وكما سبق أن ذكرنا، فإن المعادلة رقم (1-9) لا يمكن الإعتماد عليها فى عملية القياس، نظرا لوجود عوامل أخرى تؤثر على الإستهلاك الكلى بخلاف الدخل، بالإضافة إلى أخطاء القياس ...الخ. لذلك فإن الأمر يتطلب تحويل العلاقة الرياضية إلى علاقة إحصائية أو إحتمالية بإدخال المتغير العشوائى μi. وبذلك تكون دالة الإستهلاك فى صورتها الإحتمالية أو العشوائية القابلة للقياس كما يلى:

$$\left.\begin{array}{l} Ct = F(Yt) + \mu i \\ \\ Ct = \alpha + \beta_Y Y_t + \mu i \end{array}\right\} \quad \text{أو} \qquad (1\text{-}10)$$

2ـ الخطوة الثانية: تقدير معالم النموذج:

تأتى الخطوة الثانية وهى تقدير معالم (أو معادلات) النموذج بإستخدام الطريقة المناسبة للتقدير. وتتطلب هذه المرحلة أن يكون الباحث ملما إلماما كاملاً بكافة طرق القياس والفروض الخاصة بكل طريقة، وتتضمن هذه المرحلة ما يلى:-

(1)- جمع البيانات عن جميع المتغيرات الداخلة فى النموذج وهناك نوعان أساسيان من البيانات التى يمكن استخدامها فى تقدير معالم النموذج:

أ- بيانات السلاسل الزمنية Time Series Data

ب- البيانات المقطعية Cross-Section Data

ج- ويمكن دمج الإثنين معاً فى شكل سلسلة زمنية من البيانات المقطعية.

وعلى الباحث القياسى أن يكون مدرك المشاكل المترتبة على إستخدام كل نوع من هذه البيانات، فى تقدير العلاقات وتفسيرها واستخدامها فى التنبؤ بالظاهرة محل الدراسة.

(2)- دراسة الشروط الخاصة بالتمييز للدالة تحت الدراسة:

ونعنى بذلك أن يتحقق الباحث مما إذا كانت المعلمات التى يقدرها بإستخدام بيانات معنية وأسلوب إحصائى معين هى معلمات العلاقة محل الإهتمام. فعلى سبيل المثال إذا أردنا تقدير دالة الطلب على سلعة معينة فإن العلاقة يمكن صياغتها كما يلى:

$$Qi = F(Pi) + \mu i$$

أو (1-11)

$$Qi = \alpha + bpi + \mu i$$

حيث تشير:

Qi إلى الكميات، Pi إلى الأسعار، a ، b معلمات الدالة. وفى هذه الحالة قد لا نكون متأكدين إذا ما كانت العلاقة المقدرة هى دالة طلب أو علاقة عرض. حيث أن علاقة العرض تربط -أيضا- بين نفس المتغيرين، وقد يكون لها نفس الشكل. ويرجع ذلك -فى بعض الأحيان- إلى أن البيانات المتاحة قد لا تميز بين الكميات المطلوبة والكميات المعروضة- وإنما هى تغطى الكميات التوازنية Qi التى تنتج عن تقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض.

(3) اختيار الطريقة أو الأسلوب المناسب لتقدير معالم النموذج، والفروض الخاصة بهذه الطريقة والمعنى الإقتصادى للتقديرات الخاصة بمعاملات النموذج. ويمكن تقدير معلمات العلاقات الاقتصادية بعدة طرق يمكن تصنيفها إلى مجموعتين رئيسيتين:-

المجموعة الأولى: طرق تقدير معالم المعادلة الواحدة.

وأهم هذه الطرق، طريقة المربعات الصغرى (OLS)، وطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS) وطريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS) وطريقة الإمكان الأعظم للمعلومات الكاملة (LiML).

المجموعة الثانية: طرق تقدير معلمات المعادلات الآتية:

وأهم هذه الطرق، طريقة المربعات الصغرى على ثلاث مراحل (3SLS)، طريقة الإمكان الأعظم للمعلومات الكاملة.

ويتوقف اختيار الطريقة المناسبة للتقدير على عدة عوامل أهمها:-

(أ)- طبيعة العلاقة بين المتغيرات.

(ب)- خصائص التقديرات المتحصل عليها من طريقة من طرق القياس، وتوافر الفروض الخاصة بكل طريقة.

(ج)- بساطة الطريقة من حيث العمليات الحسابية اللازمة.

(د)- الوقت والتكاليف اللازمين لتقدير معلمات النموذج.

(3) الخطوة الثالثة: تقييم التقديرات:

تأتى الخطوة الثالثة لتقييم معلمات النموذج المقدرة- بإستخدام ثـلاث أنواع من المعايير:-

1-المعايير الإقتصادية.

تحدد هذه المعايير، النظرية الإقتصادية. والتى تهتم بإشارات وقيم معلمات العلاقة الإقتصادية، مثال ذلك المرونات، القيم الحدية، المضاعفات، إشـارات علاقات الطلب وعلاقات العرض ....الخ. وعلى سبيل المثـال تقـدير دالـة الطلب كما يلى:-

$$\hat{Q}_D=\hat{\alpha} + \hat{\beta} p + \hat{\beta}_1 p_1 + \ldots\ldots \hat{\beta}_n p_n + \hat{\beta}_y Y_i \ldots\ldots\ldots\ldots (1\text{-}12)$$

$\hat{\beta}$ تكون ذات إشارة سالبة، $\hat{\beta}_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \hat{\beta}_n$ ، تكون سالبة فى حالة السلع المكملة، وموجبة فى حالة السـلع البديلـة. بينمـا $\hat{\beta}_y$ تختلـف إشاراتها وقيمتها وفقا لنوع السلعة بالنسبة للمستهلك، والتى تكون كماليـة أو جيدة أو رديئة.

وإذا ظهرت بعض التقديرات بإشارة مخالفـة لمـا تقـدره النظريـة الإقتصادية، فإنه ينبغى فى هذه الحالة رفض التقديرات لتناقضها مع النظرية، إلا إذا كان هناك سبب قوى يمكن أن نستدل عليه.

2- المعايير الإحصائية:

تحدد هذه المعايير النظرية الإحصائية، والتـى تهـدف إلـى تقيـيم التقديرات المتحصل عليها لمعلمات النموذج، وكذلك درجة الثقـة فـى هـذه التقديرات. ومن أهم المقاييس الإحصائية معامل التحديد والخطـأ المعيـارى للتقدير.

وتجدر الإشارة إلى أن المعايير الإحصائية تأتى فى المرتبة الثانية بعد المعايير الإقتصادية، فإذا جاءت التقديرات ببعض المعلمات ذات إشارات أو قيم مخالفة فإنه ينبغى رفضها تماماً، حتى وأن كان معامل التحديد وتقديرات الخطأ المعيارى ذات اتجاهات صحيحة (معنوية إحصائيا).

3ـ المعايير القياسية:

يحدد هذه المعايير نظرية الإقتصاد القياسى، وتهدف إلى إرشاد الباحث إلى ما ينبغى أن تكون عليه التقديرات المتحصل عليها، كذلك البحث عن مدى مطابقة فروض الأساليب القياسية، والتى تختلف باختلاف الطرق القياسية. معنى ذلك أن المعايير القياسية لها أهميتها من ناحيتين:-

(1)- أنها تحدد مدى إمكانية الإعتماد على المعايير الإحصائية، على سبيل المثال – كما سيأتى ذكره- تفترض طريقة المربعات الصغرى، أنه لا يوجد ارتباط تسلسلى بين الأخطاء فى النموذج أو بعبارة أخرى تفترض استقلال قيم هذه الأخطاء، فإذا لم يتحقق هذا الفرض فإن الأخطاء المعيارية للتقديرات لا يمكن أن يؤخذ بها كمعيار للمعنوية الإحصائية، حيث أنها تكون غير دقيقة فى قياس انتشار تقديرات كل معلمة حول القيمة الحقيقية (المجهولة) لهذه المعلمة.

(2)- أنها تحدد مدى تحقيق الخصائص المرغوب فيها فى التقديرات المتحصل عليها لمعلمات النموذج.

وفيما يلى عرض موجز لأهم الخصائص المرغوب توفرها فى تقديرات معلمات العلاقات الإقتصادية:-

أ- عدم التحيز Unbiased

يعرف التحيز فى تقدير معلمة معينة θ بأنه عبارة عن الفرق بين التوقع الرياضى (أو الوسط الحسابى) لتقديرات المعلمة $\hat{\theta}$ والقيمة الحقيقية لها، أى أن التحيز يساوى:-

$$Bias = E(\hat{\theta}) - \theta$$

معنى ذلك يمكن القول أن $\hat{\theta}$ تقدير غير متحيز للمعلمة $\hat{\theta}$ إذا كان التحيز صفر، أى إذا كان:-

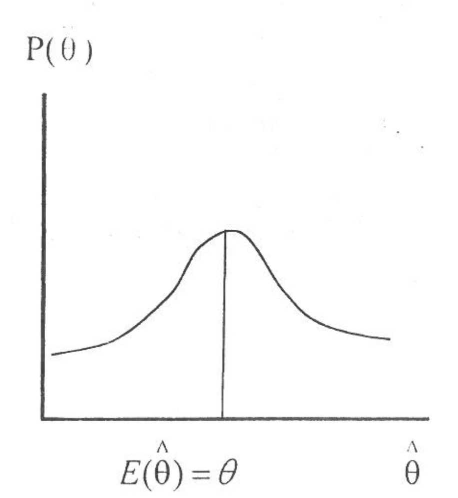
$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

ويمكن توضيح معنى هذه الخاصية على النحو التالى:-

نفرض أننا نقيس قيمة المعلمة θ من عينة معينة حجمها n ، وأننا كررنا عملية القياس لهذه المعلمة بإستخدام عدد كبير جداً من العينات التى لها نفس الحجم. فى هذه الحالة سيكون لدينا عدد كبير جداً من التقديرات للمعلمة θ. ويمكن تكوين توزيع إحتمالى لتقديرات هذه المعلمة ووسطه الحسابى يساوى $E(\hat{\theta})$. على ذلك فإذا كانت القيمة المقدرة للمعلمة يتوزع حول وسط حسابى قيمته مساوية للقيم الحقيقية للمعلمة θ كما فى الشكل رقم (1-2) فإننا نقول أن التقدير غير متحيز. أما إذا كانت القيم المقدرة تتوزع حول وسط حسابى قيمته مختلفة عن القيمة الحقيقية للمعلمة، كما فى الشكل رقم (1-3)، فإننا نقول أن التقدير متحيز.

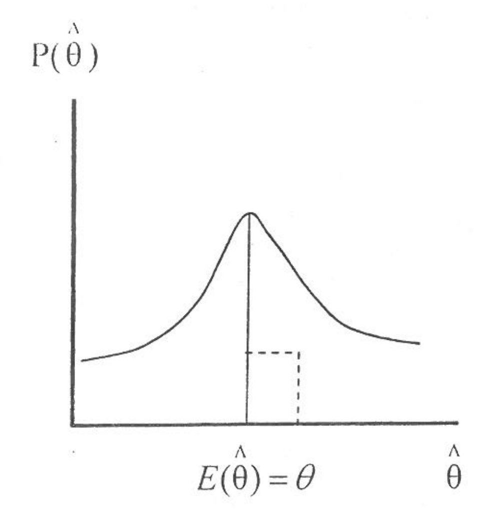
شكل رقم (1-2)

تقدير غير متحيز



شكل رقم (1-3)

تقدير متحيز



ب ـ أصغر تباين **Minimum Variance**

إذا سحبنا عدداً كبيرا من العينات ذات حجم معين n، وحسبنا من كل عينة وفقا لطريقة تقدير معينة القيمة التقديرية المعلمة $(\hat{\theta})$ فإننا سوف نحصل على مجموعة كبيرة من هذه التقديرات لقيمة المعلمة الحقيقية غير المعلومة θ، وهذه القيم التقديرية تنتشر حول وسطها الحسابى $E(\hat{\theta})$ يتبـاين $\text{var}(\hat{\theta})$ يحسب كما يلى:

$$\text{Var}\hat{\theta} = E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2$$

$$= E[(\hat{\theta})^2 - E(\hat{\theta})]^2$$

وإذا كان هذا التباين أصغر من تباين كـل التقـديرات التـى يمكـن الحصول عليها بتطبيق أساليب قياس أخرى للمعلمة θ. فنقول أن التقدير $\hat{\theta}$ يتمتع بأصغر تباين. على ذلك إذا كان $\hat{\hat{\theta}}$ أى تقدير آخر للمعلمة θ فإن خاصية أصغر تباين يمكن التعبير عنها كما يلى:-

$$Var(\hat{\theta}) \leq Var\ \hat{\hat{\theta}}$$

جـ- الكفاءة Efficiency

يقال أن تقديراً معينا $\hat{\theta}$ للمعلمة θ تقـدير كـفء إذا تـوفرت فيـه الخاصيتان الآتيتان:-

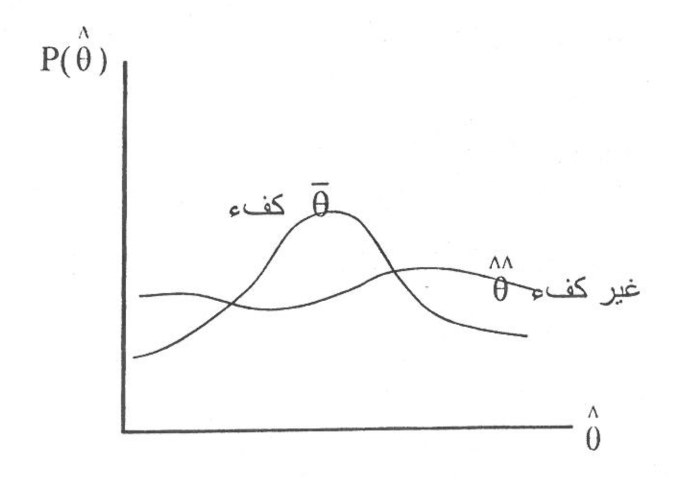
1- $E(\hat{\theta}) = \hat{\theta}$

2- $Var(\hat{\theta}) \leq Var(\hat{\hat{\theta}})$

ويوضح ذلك الشكل رقم (1-4)

شكل رقم (1-4)

يوضح المقارنة بين التقدير الكفء وغير الكفء



د- أفضل تقدير خطى غير متحيز

Best Linear unbiased (Blue)

يعرف التقدير الخطى بأنه ذلك التقدير الذى يمكن صياغته كدالة خطية

فى قيم المتغير التابع. ويقال أن تقديراً معيناً وليكن $\hat{\theta}$ أفضل تقدير خطى غير متحيز للمعلومة θ إذا توافرت الشروط الآتية:-

1- أن يكون غير متحيز $E(\hat{\theta}) = \hat{\theta}$

2- أن يكون له أقل تباين ممكن $Var(\hat{\theta}) \leq Var(\hat{\hat{\theta}})$

حيث أن $\hat{\hat{\theta}}$ تقدير آخر للمعلمة θ

3- دالة خطية لقيم المتغير التابع.

هـ- أصغر متوسطات لمربعات الأخطاء

Minimum Mean Square Error.

وتعتبر هذه الخاصية مزيجا من خاصيتى عدم التحيز وأصغر تباين، ويعبر عنها كما يلى:-

$$MSE(\hat{\theta}) = var(\hat{\theta}) + [Bias(\hat{\theta})]^2$$

أى أن متوسط مربعات الخطاء عبارة عن تباين التقدير مضافا إليـــه مربع تحيزه.

و- الكفاية Sufficiency

يعتبر التقدير كافيا Sufficient، إذا كان مقدرا بطريقة تستخدم كـل المعلومات المتوفرة فى العينة عن المعلمة الحقيقية. أى إذا كانت تستخدم كـل مشاهدات العينة فى تقدير المعلمة θ. فالوسط الحسـابى للعينـة $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum x$ يعتبر تقديرا كافيا لمتوسط المجتمع، لأننا نستخدم كل بيانت العينة، أما الوسيط والمنوال لا تعتبر تقديرات كافية، لأن بعض مشاهدات العينة تستخدم فقط فى حسابها.

الخطوة الرابعة: تقييم القوة التنبؤية للنموذج:

تمثل المرحلة الأخيرة من مراحل البحث القياسى، وتهتم بتقييم القوة أو القدرة التنبؤية للنموذج. حيث يعتبر الغرض من الحصول على تقديرات لمعالم النموذج، هو إمكان استخدامها فى التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغيرات، ويمكـن تقييم اختبار القدرة التنبؤية للنموذج كما يلى:-

1- الطريقة الأولى:

قياس مدى استقرار التقديرات، أى مدى حساسيتها للتغير فـى حجـم العينة. وتتلخص هذه الطريقة فى إضافة مشاهدات أو بيانات جديـدة للعينـة الأصلية السابق استخدامها فى تقدير معلمات النموذج. تم إعادة عملية التقدير بإستخدام العينة الجديدة (الأصلية مضافاً إليها البيانات الجديدة). وطبيعـى أن تختلف التقديرات المتحصل عليها من بيانات العينة الأولى (الأصلية). ويمكن اختبار الفرق بين التقديرات إحصائيا بالطرق الإحصائية المناسبة. فإذا كـان الفرق معنويا دل ذلك على ضعف القوة التنبؤية للنموذج.

2ـ الطريقة الثانية:

وتتلخص هذه الطريقة فى إستخدام التقديرات المتحصل عليهـــا مـــن بيانات العينة فى النموذج، لفترة أخرى لا تدخل فى فترة العينة الأولى، بمعنى الحصول على تقدير للمتغير التابع من العينة فى فترة أخرى لم تكن تشـــملها العينة، كذلك تكون القيمة الحقيقية للمتغير التابع معروفة خلال هذه الفترة. ثم نقارن القيم المتحصل عليها للمتغير التابع (قيم التنبؤ المقدرة) مع القيم الفعلية له. وعادة يكون هناك إختلاف بين القيم المقدرة (قيم التنبؤ) والقيم الفعلية. ويتم عمل اختبار إحصائى للفرق بين القيم المقدرة والفعلية لمعرفة مدى معنوية هذه الفروق. فإذا كان الفرق معنويا، كانت القدرة التنبؤية للنموذج حقيقية.

وهناك عدة تؤدى إلى ضعف القدرة التنبؤية للنموذج منها:-

(أ)- عدم دقة البيانات الخاصة بالمتغيرات التفسيرية.

(ب)- عدم دقة التقديرات الخاصة بالنموذج.

(ج)- تغير الظروف الخاصة بالنموذج.

الفصل الثانى:

النماذج الإقتصادية

Economic Models

تم مناقشة توصيف الإقتصاد القياسى فى الفصل الأول، كذلك خطوات البحث القياسى التى يجب أن يتبعها الباحث فى مجال الإقتصاد القياسى. وعرفنا أن الخطوة الأولى فى هذا المجال تتمثل فى توصيف أو صياغة النموذج، بهدف الحصول على تقديرات لمعلمات المعادلة (أو المعادلات) التى يحتويها. وتعبر عن العلاقات الإقتصادية بين المتغيرات التى تدخل فى النموذج محل الدراسة. لذلك سوف يتم مناقشة مفهوم النماذج و المتغيرات الداخلة فيها ومعادلاتها وأنواعها فى هذا الفصل.

2/ 1-تعريف النموذج الإقتصادى

يعرف النموذج الإقتصادى بأنه عبارة عن مجموعة من العلاقات توضحها النظرية الإقتصادية وتربط بين مجموعة من المتغيرات الإقتصادية، والتى يعبر عنها فى صورة معادلات تشرح العلاقة بين هذه المتغيرات.

ويمكن توضيح مفهوم النموذج من خلال المعادلتين التاليتين:-

المثال الأول:

النموذج الإقتصادى لسوق السيارات والذى يتكون من ثلاث علاقات حددتهم النظرية الإقتصادية كما يلى:

1- علاقة طلب السيارات بسعرها عكسية.

2- علاقة عرض السيارات بسعرها طردية.

3- شرط توازن سوق السيارات تساوى الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة.

وهناك ثلاث متغيرات فى النموذج بينهم العلاقات، الكمية المطلوبة، (Qd)، والكمية المعروضة (Qs)، السعر (P). ويمكن التعبير عن هذه

العلاقات فى شكل معادلات رياضية – يجب أن تساوى عدد المعادلات عدد المتغيرات – كما يلى:-

$$Q_d = \bar{f}(p) \ldots\ldots\ldots \quad (2\text{-}1)$$
$$Q_s = F^{+}(p) \ldots\ldots \quad (2\text{-}2)$$
$$Q_d = Qs \ldots. \quad (2\text{-}3)$$

شكل رقم (2-1)

ويطلق على الشكل رقم (2-1) النموذج الإقتصادى.

المثال الثانى: نموذج كينز للدخل القومى

لسهولة عرض النموذج نفترض أن الإقتصاد القومى مكون من قطاعين فقط، هما القطاع العائلى والذى يقوم بالانفاق الإستهلاكى وقطاع الأعمال الخاص الذى يقوم بالإنفاق الإستثمارى. ويتكون هذا النموذج من ثلاث علاقات حددتهم النظرية الإقتصادية كما يلى:

1- علاقة الإستهلاك الكلى بالدخل القومى وهى علاقة طردية: وبميل **(الميل الحدى للإستهلاك) أكبر من الصفر وأقل من الواحد. كذلك يتزايد الإستهلاك بنسبة أقل من زيادة الدخل.**

2- علاقة الإستثمار، ونفترض النظرية الإقتصادية أنه ثابت.

3- علاقة تعريفية، والتى تعرف الدخل القومى بأنه مجموع الإستهلاك والإستثمار.

وهناك ثلاث متغيرات فى النموذج، الإستهلاك الكلى (C)، الإستثمار (I)، والدخل القومى (Y). ويمكن التعبير عن هذه العلاقات فى شكل معادلات رياضية كما يلى:

عدد المتغيرات – كما يلى:-

شكل رقم (2-2)

$$C = f(y) \ldots\ldots. \qquad (2-4)$$
$$I = \bar{I}0 \ldots\ldots \qquad (2-5)$$
$$Y = C + \bar{I} \ldots. \qquad (2-6)$$

ويطلق على الشكل رقم (2-2) النموذج الإقتصادى.

وتختلف النماذج الإقتصادية فيما بينها، من حيث أنواع المتغيرات التى تحتويها وكذلك المعادلات التى تتكون منها. ولتفهم الأنواع المختلفة للنماذج الإقتصادية يجب دراسة أنواع المتغيرات والمعادلات التى يمكن أن تحتويها النماذج.

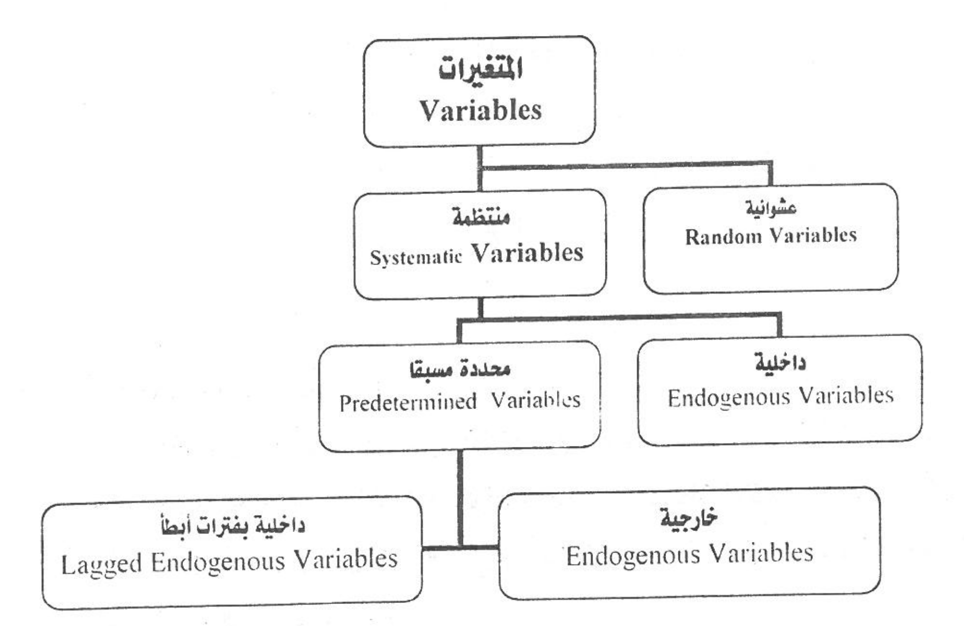
2/2 متغيرات النموذج الإقتصادي

تحتوى معادلات أى نموذج إقتصادى على عدد من المتغيرات الإقتصادية. تختلف هذه المتغيرات وفقا لطبيعة المشكلة الإقتصادية محل البحث. ويمكن تقسيم المتغيرات التى تحتويها المعادلات فى أى نموذج بشكل عام كما فى الشكل رقم (2-3).

شكل رقم (2-3)

متغيرات النموذج الإقتصادى

وتقسيماتها المختلفة



يتضح من الشكل رقم (2-3) أن المتغيرات التى يمكن أن تحتويها معدلات النموذج تنقسم إلى نوعين رئيسيين:-

1. المتغيرات المنتظمة Systematic Variables

وهى تلك المتغيرات التى تدخل فى النموذج بصورة صريحة وواضحة، وتعبر عن مفهوم واضح ومحدد المعنى.

فعلى سبيل المثال، عند تحديد عدد المتغيرات التى يمكن أن تدخل فى دالة الطلب، فإن الباحث لا يستطيع أن يأخذ فى الإعتبار جميع المتغيرات، وإلا فقدت الدالة أهميتها، لذلك فهو يلجأ إلى الإكتفاء بعدد محدود من المتغيرات الكمية ذات الصلة الوثيقة بالدالة. والتى تتغير بصورة منتظمة أو يكون تأثيرها على الدالة واضحا، مثال ذلك سعر السلعة، أسعار السلع الأخرى، دخل المستهلك، مثل هذه المتغيرات يطلق عليها متغيرات منتظمة.

2. المتغيرات العشوائية Random Variables

هى تلك المتغيرات التى لا تظهر فى المعادلات بصورة صريحة ولا تعتبر متغيرات واضحة ومحددة المعنى. ومن هذه المتغيرات -كما فى المثال السابق عن دالة الطلب - المتغيرات النوعية التى لا يمكن قياسها أو التعبير عنها كميا مثل أذواق المستهلكين أو الحروب أو الأزمات أو تغير توزيع الدخل، أو عادات وميول المستهلكين، كذلك قد تكون متغيرات كمية ولكن أهميتها أقل. ولذلك تجمع هذه المتغيرات فى شكل متغير واحد، يعبر عن الحصيلة النهائية لهذه المتغيرات. ويكون هذا المتغير الجديد عشوائيا، حيث أنه لا يعبر عن ظاهرة محددة أو مفهوم واضح، ولكنه يعبر عن حصيلة مجموعة كبيرة متنافرة من المتغيرات الأخرى، بالإضافة إلى أخطاء القياس ...الخ

وهذا النوع من المتغيرات هو الذى يميز النمـوذج القياسـى عـن النمـوذج الرياضى.

هذا وتنقسم المتغيرات المنتظمة إلى نوعين أساسيين من المتغيرات:-

أ- المتغيرات الداخلية Endogenous Variables

وهى تلك المتغيرات التى تحدد قيمتها داخل النموذج الإقتصادى، الذى يمثل الظاهرة محل البحث، وذلك بعد معرفة التقديرات العددية لمعالم النموذج وقيم المتغيرات الأخرى فيه.

ب- المتغيرات المحددة مسبقا Predetermined Variables

وهى المتغيرات التى لا تتحدد قيمتها عـن طريـق النمـوذج محـل الدراسة، وإنما تتحد بعوامل أخرى خارجة عن النموذج. ومن ثـم لا تعامـل على أنها متغيرات بقدر ما تعامل على أنها معطيات أو ثوابت. ومعنى ذلك أن هذه المتغيرات تؤثر على المتغيرات المحددة مسبقا فى النموذج، ولكن علـى الباحث القياسى أن يكون حذرا عند تحديد عدد هذه المتغيرات، حيث أنه كلما زاد عددها كلما ازدادت الأمور تعقيدا كنتيجـة لزيـادة البيانـات المطلوبـة وصعوبة العمليات الحسابية.

كذلك تنقسم المتغيرات المحـددة مسـبقا إلـى متغيـرات خارجيـة Exogenous Variables ومتغيرات داخلية محددة فى فترات سابقة أو ذات فترات إبطاء Lagged Endogenous Variables.

وبالرجوع إلى المثال السابق عن نموذج التوازن لسـوق السـيارات، فإننا نجد أن الكمية المطلوبة من سلعة السيارات Q_D يحددها السعر (P) كمـا فى المعادلة (2-1)، كذلك الكمية المعروضة من السيارات Qs يحددها أيضـا

السعر P كما فى المعادلة رقم (2-2)، ويتحدد السعر بدوره عن طريق التفاعل بين الطلب والعرض كما فى المعادلة رقم (2-3).

ويلاحظ أن المتغيرات الداخلية فى هذا النموذج ثلاثة هى QD ، Qs، P ، وهو نفس عدد المعادلات التى يحتويها، وعلى ذلك فالنموذج يكون كاملا:

وإذا أعدنا صياغة النموذج بصورة أخرى كما يلى:

$$Q_D = F(P, \bar{y}) \qquad (7-2)$$
$$Q_S = F(P, CO) \qquad (8-2)$$
$$D = S \qquad (9-2)$$

وتوضح المعادلة رقم (2-7) أن الكمية المطلوبة دالة فى السعر ودخل المستهلك. بينما توضح المعادلة رقم (2-8) أن الكمية المعروضة دالـــة فـــى سعر السلعة وتكلفة الإنتاج "Co"، بينما تعطى المعادلـــة رقـــم (2-9) شـــرط التوازن، فى هذا النموذج نجد أن الكمية المطلوبة تتحدد عن طريـــق الســـعر ودخل المستهلك وبالتالى تعتبر Q_D متغيـــر داخلـــى، كـــذلك نجـــد الكميـــة المعروضة من السلعة يحددها سعر السلعة وتكلفة الإنتاج، ومن ثم تعتبر Qs متغير داخلى أيضا، كما أن السعر P يتحدد بالتفاعل بـــين قـــوتى العـــرض والطلب. ومن ثم يعتبر متغير داخلى. ويلاحظ أن عـــدد معـــادلات النمـــوذج يساوى عدد المتغيرات الداخلية (P, Q_S, Q_D)، أما بالنسبة للمتغيرين الآخرين وهما الدخل وتكلفة الإنتاج نجد أن قيمتها لا تتحدد داخل النموذج، بل يحددهما عوامل أخرى عديدة خارج النموذج، ومن ثم فإنهما يعتمدان متغيران خارجيان ويعاملان كثوابت.

ومن ناحية أخرى إذا أعدنا صياغة نموذج كينز للدخل القومى السابق الإشارة إليه، ليصبح أكثر واقعيا على التالى:

$$C = F(Y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10\text{-}2)$$
$$C = F(Y_{-1}, R) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11\text{-}2)$$
$$C = C + I + E \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12\text{-}2)$$

حيث أن Y_{-1} قيمة الدخل فى الفترة السابقة، R سعر الفائدة، E الإنفاق الحكومى. ويمكن أن نستنتج من هذا النموذج أن كلا من الإستهلاك (C) والدخل (Y) و الإستثمار (I)، متغيرات داخلية. لأنها تتحدد فى النموذج محل الدراسة. أما سعر الفائدة (R) والإنفاق الحكومى (E) والدخل فى الفترة السابقة (Y_{-1}) تعتبر متغيرات محددة مسبقا، حيث R، E متغيرات خارجية Y_{-1} يعتبر متغير داخلى ذو فترة إبطاء واحدة.

3/2 – معادلات النموذج:

بعد تعريف النموذج الإقتصادى، واستعراض أنواع المتغيرات التى يمكن أن يحتويها هذا النموذج فى شكل معادلات رياضية، نأتى إلى تحديد الشكل الرياضى الذى تأخذه هذه المعادلات من حيث كونها خطية أو غير خطية، حيث يؤثر هذا الشكل على التقديرات المتحصل عليها للمعلمات. لذلك يكون من الضرورى محاولة تعيين الشكل المناسب للعلاقة الإقتصادى خاصة وأن النظرية الإقتصادية لا تقدم لنا المعلومات الكافية عن طبيعة الدوال والصورة الرياضية لهذه الدوال.

ويمكن الاستعانة بشكل الإنتشار فى تحديد شكل العلاقة بين متغيرين، ومعرفة ما إذا كانت هذه العلاقة يمكن تمثيلها فى شكل خط مستقيم أو منحنى. كذلك يمكن أن نلجأ إلى تجربة الصيغ المختلفة على البيانات لاختيار أفضلها باستخدام معايير إحصائية مناسبة إلى جانب المبررات النظرية.

وتأخذ العلاقة بين أى متغيرين X ، Y أحد الأشكال التالية:

1ـ العلاقة الخطية

يمكن صياغة العلاقة الخطية بين المتغير التابع (Y) والمتغير المستقل (X) [أو يطلق عليه المتغير التفسيرى] كما فى المعادلة رقم (2-13) التالية:

$$Y= \alpha + \beta x \;........\;...............................(13\text{-}2)$$

وتعتبر الصيغة رقم (2-13) هى الشكل المناسب للعلاقة بين المتغيرين X, Y و طريقة المربعات الصغرى هى أهم طرق القياس المستخدمة فى تقدير معلمات العلاقات الخطية (α, β).

2ـ العلاقة الخطية بين Y ومقلوب X

ويمكن حساب هذه العلاقة كما فى المعادلة رقم (2-14) التالية:-

$$Y = \alpha + \beta \,.\, \frac{1}{X}..(14-2)$$

وهذه المعادلة يمكن تحويلها إلى الصورة الخطية، وذلك بعمل التحويل التالى:

$$X^{*} = \frac{1}{X}$$

$$Y= \alpha_1 + \beta.\, X^{*} \;.............................. (14\text{-}2`)$$

3ـ العلاقة غير الخطية:

تعتبر العلاقة غير الخطية بين المتغيرين X، Y علاقة من الدرجة الثانية، ويمكن صياغتها فى المعادلة رقم (2-15) التالية:

$$Y= \alpha + \beta_1 X + \beta_2 X_2 \;...................... (15\text{-}2)`$$

ويمكن تحويل هذه المعادلة إلى الصورة الخطية فى متغيرين كما يلى:
بفرض أن:

$X_1 = X$
$X_2 = X^2$

فى هذه الحالة يمكن إعادة كتابة المعادلة كما يلى:-

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15\text{-}2)`$$

ويلاحظ أن معلمات المعادلة `(2-15) هى نفسها معلمـات المعادلـة الأصلية رقم (2-15). وإن كان هذا التحويل سوف يؤدى إلى بعض المشكلات القياسية – والتى سيأتى شرحها فيما بعد– ومن أهمها عدم استقلالية المتغيرات المستقلة.

4ـ العلاقة الآسية بين المتغيرين X, Y:

يمكن صياغة العلاقة الآسية بين متغيرين X, Y كما فى المعادلة رقم (2-16) التالية:

$$Y = \alpha X^{\beta} \qquad \ldots\ldots\ldots (16\text{-}2)`$$

وهذه المعادلة يمكن تحويلها إلى الصورة الخطية بأخذ اللوغـاريتم الطبيعـى للطرفين كما يلى:-

$$\left.\begin{array}{l} \text{Log } Y = \log \alpha + \beta \log x \\ \qquad\text{أو} \\ Y^* = \alpha_1 + \beta X^* \end{array}\right\} (16\text{-}2)`$$

حيث أن:

$Y^* = \text{Log } Y$

$$X^* = \text{Log } X$$
$$\alpha_1 \quad = \text{Log } \alpha$$

ومعنى ذلك أن المعادلة الآسية رقم (2-16) أمكن تحويلها إلى معادلة خطية فى لوغاريتمات المتغيرين كما فى المعادلة رقم (2-16)`. ويلاحظ أن β2 فى المعادلة رقم `(2-16) هى نفسها فى المعادلة رقم (2-16)،

$$\therefore \ \alpha_1 = \log \alpha \qquad (16\text{-}2)$$
$$\therefore \ \alpha = e^{\alpha 1} \quad = \text{Antilog}\,(\alpha_1)$$

5ـ العلاقة نصف اللوغاريتمية:

يمكن صياغة العلاقة النصف اللوغاريتمية بين المتغيرين X, Y كما فى المعادلتين رقم (2-17)، (2-18) التاليتين:-

$$Y = \alpha + \beta \log x \ \ldots\ldots \qquad (17\text{-}2)$$

أو

$$Y = \alpha + \beta \text{ Log } x \ \ldots\ldots \qquad (18\text{-}2)$$

ويمكن كتابة المعادلة رقم (2-18) فى الصورة الآسية كما يلى:

$$Y = e^{\alpha + \beta X}$$

ويمكن تحويل المعادلتين رقم (2-17) ,(2-18) إلى الصورة الخطية كما يلى:-

$$Y = \alpha + \beta X^* \ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (17\text{-}2)`$$

حيث أن

$$X^* = \log X$$
$$Y^* = \alpha + \beta X \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18\text{-}2)'$$

حيث أن

$$Y^* = \text{Log } Y$$

يمكن القول بعد استعراض الجزء السابق – من هذا الفصل– أن هناك خمس أشكال للمعادلات الرياضية التى يتضمنها النموذج. وتعتبر العلاقة الخطية هى أفضل هذه الأشكال. وتسمى المعادلات التى يتضمنها النموذج الإقتصادى بالمعادلات الهيكلية Structural Equations وذلك نظرا لما تعرضه هذه المعادلات من هيكل أساسى للعلاقات الإقتصادية للوحدة الإقتصادية التى يتعامل معها الباحث القياسي. هذا وتختلف عدد المعادلات فى النموذج الإقتصادى، تبعا لسهولة أو صعوبة تفسير الظاهرة محل البحث، والأهداف التى يسعى الباحث إلى تحقيقها من صياغة النموذج.

ويمكن تقسيم المعادلات الهيكلية إلى نوعين رئيسيين كما يلى:–

1ـ المعادلات الإقتصادى:

تعتبر الدالة (المعادلة) دالة إقتصادية إذا كانت تحتوى على عنصر (متغير) السعر، ومن ثم يحددها الإقتصادى، وتنقسم المعادلات الإقتصادية إلى:–

أـ المعادلات السلوكية **Behavioral Equations**

تصنف المعادلة بأنها معادلة سلوكية إذا كانت توضح علاقة دالية بين متغيرين أو أكثر، وتكون هذه العلاقة ناشئة أساساً من سلوك معين من جانب الأفراد أو من جانب العناصر المختلفة التى تؤثر على الدالة وتظهر ردود

فعلهم نتيجة للتغيرات التى تحدث فى بعض المتغيرات. ومن أمثلة المعادلات السلوكية، معادلات العرض والطلب التى تصنف السلوك الإقتصادى للمنتجين والمستهلكين، وتفسير القرارات الإقتصادية التى يتخذونها.

ب- المعادلة التعريفية Definitional Equations

ينظر إلى المعادلة باعتبارها معادلة تعريفية، إذا كانت تعرف:-

(1)- وضعا معينا، مثال ذلك معادلات شرط التوازن فى نماذج أسواق السلع المختلفة، والذى ينص على أن التوازن فى السوق يتحقق عندما تتساوى المكية المطلوبة مع الكمية المعروضة أى أن $Q_D=Q_S$. مثل هذه المعادلة لا تظهر سلوكا معينا أو رد فعل معين، ولكنها تكتفى فقط بتعريف حالة التوازن.

(2)- متغيراً معيناً، مثال ذلك تعريف الدخل القومى بأنه مجموع الإستهلاك الكلى والإنفاق الإستثمارى $Y=C+I$. مثل هذه المعادلة -أيضا- لا تظهر سلوكا معينا ولكنها تكتفى فقط بتعريف الدخل القومى.

(3)- أو تعطى قيم محددة لأحد المتغيرات.

2- المعادلات الفنية Technical Equations

تعتبر الدالة (المعادلة) دالة فنية إذا كانت لا تحتوى على عنصر السعر، ومن ثم تحدد من قبل الفنيين والمهندسين. وتوضح المعادلة فى هذه لحالة علاقة فنية بحته بين المتغيرات. ومن أمثلتها دالة الإنتاج، التى توضح العلاقة بين حجم الإنتاج الكلى للمنشأة ومدخلات العملية الإنتاجية، ومن أشهر هذه الدوال، دالة إنتاج كوب دوجلاس والتى تأخذ الشكل التالى:-

$$X = Aq_L^{\alpha} \cdot q_K^{\beta} \quad \text{................} \quad (19-2)$$

حيث أن:

q_L الكمية المستخدمة كمدخلات من عنصر العمل.

q_K الكمية المستخدمة كمدخلات من رأس المال.

X كمية الإنتاج الكلى.

α,β معلمات.

A قيمة ثابتة فى الدالة.

4/2ـ أنواع النماذج الإقتصادية وفقا للمتغيرات التى تحتويها

تنقسم النماذج الإقتصادية من حيث أنواع المتغيرات التى تحتويها إلى نوعين أساسيين:-

1ـ النماذج غير الاحتمالية

تنقسم النماذج الاقتصادية من احيث أنواع المتغيرات التى تحتويها إلى نوعين أساسيين:-

2 ـ النماذج غير الإحتمالية:

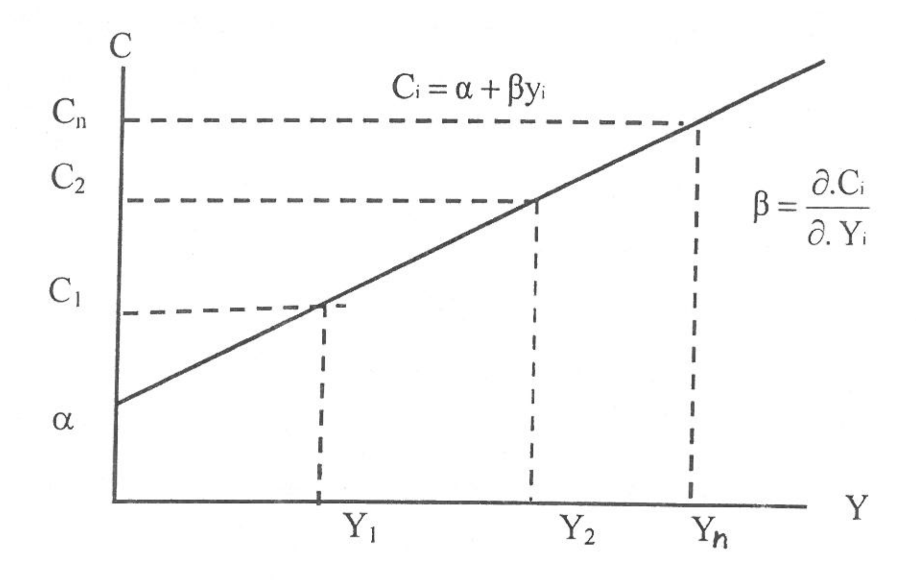
وهى تلك النماذج التى توضح وجود علاقة تامة بين المتغيرات المختلفة، ومث تلك النماذج يفترض الإقتصاد الرياضى وجودها. وعلى سبيل المثال، إذا أخذنا دالة الإستهلاك، والتى تقرر النظرية الإقتصادية أن الإستهلاك الكلى يتوقف على الدخل الممكن التصرف فيه فقط وأن العلاقة بينهم هامة كما فى المعادلة رقم (2-20) التالية:

$$C_i = \alpha + \beta Y_i \ldots\ldots\ldots \qquad (20\text{-}2)$$

هذا يعنى أن الإستهلاك الكلى يتحدد فقط عن طريق الـــدخل الممكـــن التصرف فيه، وليست هناك عوامل أخرى أو إعتبارات أخـــرى تـــؤثر فـــى الإستهلاك. وتمثل هذه الدالة فى شكل خط مستقيم كما فى الشكل رقم (2−2).

شكل رقم (2-2)

علاقة الإستهلاك بالدخل الممكن التصرف فيه



يتبين من الشكل رقم (2-2) و المعادلة رقم (2-20) أنه لكل مســـتوى من مســـتويات الـــدخل Y_1, Y_2, Y_n، مســـتوى محـــدد مـــن الإســـتهلاك C_1, C_2, C_n. وهذا النوع من النماذج (غير الإحتمالية) يتعامـــل معـــه فقـــط الإقتصاد الرياضى، وليس الإقتصاد القياسى.

2ـ النماذج الإحتمالية:

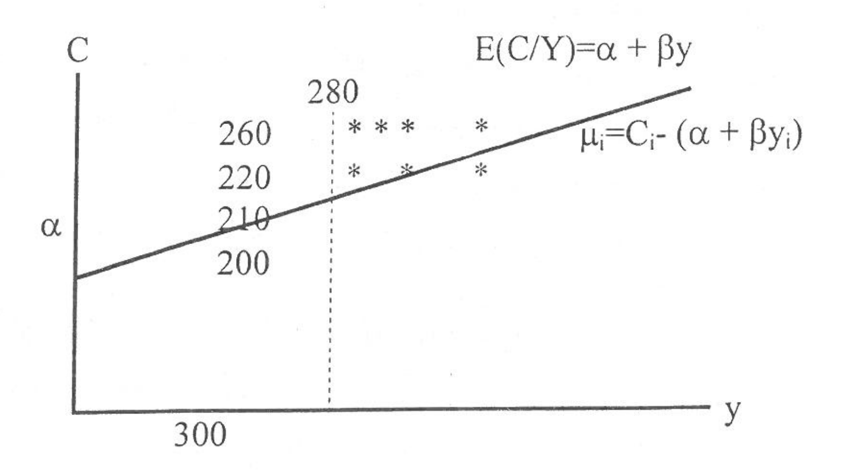
وهى تلك النماذج التى لا تفترض وجود علاقة تامة بين المتغيرات، وإنما نأخذ فى إعتبارها إدخال العنصر أو المتغير العشوائى فى العلاقة، وذلك للمتغير عن المتغيرات الأخرى التى لم تتضمنها العلاقة، التغيرات العشوائية، أخطاء القياس ....الخ. وهذا النوع من النماذج هو ما نهتم بدراسته فى الإقتصاد القياسى. و النماذج غير الإحتمالية يمكن تحويلها إلى نماذج إحتمالية وذلك بإضافة المتغير العشوائى إليها. مثال ذلك إذا أضفنا المتغير العشوائى إلى المعادلة رقم (2-20) تتحول إلى العلاقة القياسية أو النموذج الإحتمالى كما يلى:

$$C_i = \alpha + \beta Y_i + \mu_i \dots\dots\dots \qquad (20\text{-}2)$$

فى هذه الحالة لا يوجد خط مستقيم يوضخ العلاقة بين C , Y كما فى الشكل رقم (2 ,2)، ولكن يوجد شكل انتشار يضم جميع النقط الممكنة الداخلة فى العينة، حيث لا تقع جميع النقاط على الخط المستقيم. كذلك عند أى مستوى من مستويات الدخل نجد قيم مختلفة للإستهلاك، فعندما يكون الدخل 300 جنيه مثلا، فإننا نجد تفاوتاً فى الإستهلاك بين الأسر المختلفة فى العينة، فقد تنفق أسرة 200 جنيه فقط على الإستهلاك، فى حين تنفق الأخرى 220، وثالثة 260، ورابعة 280 ....الخ. ويوضح ذلك الشكل رقم (2-3).

شكل رقم (2-3)

شكل انتشار للعلاقة بين الإستهلاك الكلى والدخل الممكن التصرف فيه



واختلاف القيم بين الأسر المختلفة يرجع إلى المتغير العشوائى، والذى يقدر بمجموع مربعات البواقى، أى الفرق بين Ci المشاهدة و $E(C/Y)=\alpha+\beta Y_i$ المقدرة، معنى ذلك أن هذه القيمة μ غير معروفة مسبقا وإن كان تقديرها احصائيا. ونظرا لعدم إمكان ملاحظة μ أو قياسها فإننا نقوم بعمل افتراضات خاصة بقيمتها وتوزيعها التكرارى أو الإحتمالى، أى بواسطها الحسابى والتباين الخاص بها وتغايرها، وتمثل هذه الافترضات والنتائج المترتبة على تحقيقها أو عدم تحقيقها أهمية خاصة فى دراسة الإقتصاد القياسى كما سيأتى فى الفصول القادمة.

وهذا ويمكن تقسيم النماذج الإقتصادية وفقا لعنصر الزمن إلى نوعين من النماذج:-

1ـ نماذج ساكنة Static Models

وتعرف بأنها تلك النماذج التى لا تأخذ فى اعتبارها عنصر الزمن، ومن ثم تظهر فى لحظة معينة. أو تقارن بين وضعين فى فترات زمنية مختلفة. مثل النموذج الساكن المقارن، الذى يصف حالتى توازن كل منهما تعبر عن وضع ساكن، ولكنه لا يبين لنا آثر الزمن على النموذج، كما لا يبين لنا كيف تم الانتقال من وضع توازن معين إلى وضع توازن آخر.

2ـ النماذج الحركية Dynamic Models

وتعرف بأنها تلك النماذج التى يظهر أثر الزمن فيها بصورة واضحة، ومن أهم هذه النماذج، النموذج العنكبوتى لتوازن السوق لسلعة ما Cobwed Models وخاصة السلع الزراعية.

ويجب الملاحظة أنه تم الإشارة فقط إلى تقسيم النماذج الإقتصادية وفقا لعنصر الزمن دون تفصيل، لأن دراسة هذا التقسيم تكون فى منهج الإقتصاد الرياضى بشكل أفضل، وأكثر تفصيلا.

الفصل الثالث

نموذج الإنحدار الخطى البسيط

Simple Linear Regression Model

ذكرنا فى الفصل الأول من هذا الكتاب، أن الخطوة الثانية بعد توصيف النموذج الإقتصادى، هى تقدير معالم النموذج، وفى هذا الفصل سوف نتعرف على طرق تقدير معالم النموذج الخطى البسيط. ويعتبر النموذج الخطى لمتغيرين، هو أبسط أنواع نماذج الانحدار المختلفة، إذ يقتصر على وصف علاقة خطية عشوائية تربط بين متغيرين فقط، أحدهما تابع والآخر مستقل. وتشكل دراسة هذا النموذج القاعدة الأساسية ونقطة الإنطلاق نحو دراسة نماذج أكثر عمومية وواقعية.

1/3- صياغة نموذج خطى لمتغيرين (نموذج خطى بسيط).

يعتبر النموذج الخطى لمتغيرين الأكثر بساطة والأسهل للتقدير والتحليل الإحصائى والإقتصادى من بين النماذج المختلفة. حيث لا يضم إلا متغيرين ضمن معادلة واحدة، أحدهما تابع Y ، والآخر مستقل (تفسيرى) X. وتأخذ العلاقة الحقيقية للدالة فى المجتمع الشكل التالى:-

$$Y = F(X) + \mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

أو

$$Y = \alpha + \beta X + \mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1\text{-}3)$$

حيث أن:-

Y متغير تابع

X متغير مستقل (تفسيرى)

μ الخطأ العشوائى

والنموذج رقم (1-3) بمتغيراته له الخصائص التالية:-

أ- بالنسبة للخطأ العشوائى (μ):

المتغير العشوائى له الفروض التالية:-

1- توقع الخطأ العشوائى بصفر

$$E(\mu) = 0$$

2- تباين ثابت ومتجانس فى كل فترة ولكل قيم X.

$$V(\mu)= E(\mu - E(\mu)^2= E(\mu)^2 = \sigma^2_\mu$$

3- التغاير بصفر

$$Cov(\mu_1\mu_j)=E(\mu_i\mu_i)=0 \qquad i \pm j$$

وهذا يعنى عدم وجود إرتباط ذاتى بين مشاهدات الخطأ العشوائى. أى فرض الإستقلالية.

ب- تضاف الفروض التالية:

1- المتغير المستقل X

يأخذ قيم ثابتة فى المشاهدات المتكررة، ومن ثم يكون X ، μ غير مرتبطة. أى أن:

$$Cov(X\mu)=E(x\mu)= XE(\mu)= 0$$

2- التوزيع الطبيعى

نفترض أن المتغير العشوائى له توزيع طبيعى، وكنتيجة لهذا الفرض فإن Y وتوزيع معالم الإنحدار المقدرة تتبع أيضا التوزيع الطبيعى. ويتيح هذا الفرض القيام باختيارات المعنوية لمعلمات النموذج، غير أنه ليس بالفرض الضرورى للوصول إلى تقديرات المعالم بطريقة المربعات الصغرى.

ويوضح المثال التالى هذه الفروض، فإذا كانت العينة المراد دراستها تحتوى على n من المشاهدات للمتغيرين X, Y مع الخطأ العشوائى، أى أن:

$$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots\ldots X_n$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\ldots\ldots\ldots Y_n$$

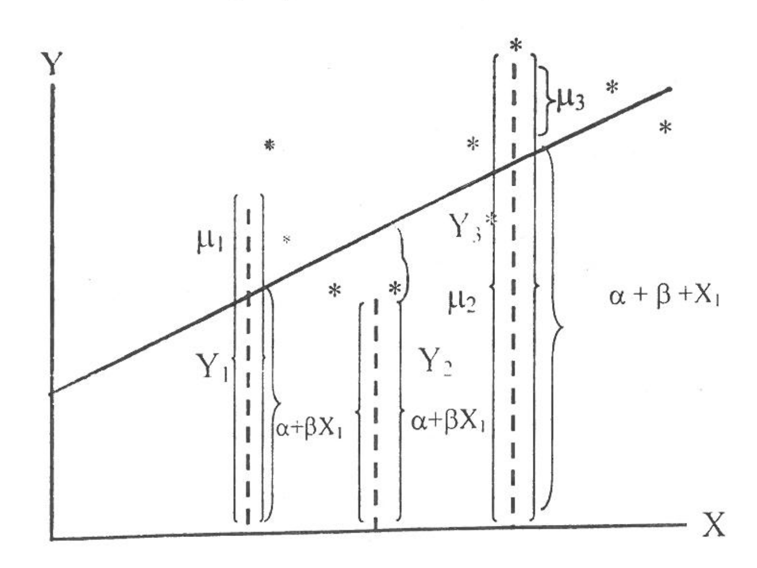
تصبح المعادلة رقم (3-1) كما يلى:

$$Y_i = \alpha + \beta y_i + \mu_i \ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{-}3)$$

ومن الناحية العلمية يمكننا تصوير المشاهدات الإحصائية للمتغيـرين X, Y فى شكل انتشار كما يوضح الشكل رقم (3-1).

شكل رقم (3-1)

شكل انتشار للعلاقة (3-2)



وفى الواقع فإن الخط $\alpha + \beta X$ مجهول الموقع، وذلك لإعتماده على المعالم المجهولة α ، β، لكن يمكن تقديره تحت الإفتراضات التالية:-

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$$
$$E(\mu_i) = 0$$
$$E(\mu_i \mu_j) = 0, \; i \neq j \quad i,j = 1,2 \ldots, n$$
$$E(\mu_i)^2 = \sigma^2 \mu \; , \quad i = j$$

ويمكن إضافة الفروض التالية:-

X_i ثابت فى المشاهدات المتكررة ومستقل عن الخطأ العشوائى.

μi له توزيع طبيعى.

وكثيرا ما يتم وضع الفروض السابقة فى الصورة التالية:-

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$$
$$\mu i \sim N(O, \sigma^2 \mu)$$

وتعنى الصورة $\mu i \sim N(O, \sigma^2\mu)$ أن النموذج له التوزيع الطبيعى، والمتغير العشوائى توقعه بصفر (وسطه الحسابى) وتباينه ثابت ويساوى $\sigma^2\mu$ ، وأن α ، β، $\sigma^2\mu$ معلمات مجهولة القيم للمجتمع، ويمكن تقديرهم إحصائيا من خلال مشاهدات العينة الخاصة بالمتغيرين X, Y. كما يمكن إجراء اختبارات الفروض والمعنوية على هذه المعلمات كما سيأتى فيما بعد. وكلما اقترب تقدير المعلمات $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ من المعلمات الحقيقية، أدى ذلك إلى انخفاض مجموع مربعات البواقى $\Sigma(Yi-\bar{Y})2$، التى تعتبر تقدير للخطأ العشوائى، ارتفعت جودة النموذج المقدر من العينة، ويعتمد ذلك على عوامل كثيرة أهمها طريقة التقدير الإحصائى، وهذا ما سيتم مناقشته فى الجزء التالى.

2/3ـ طريقة التقدير الإحصائى

تعتبر طريقة المربعات الصغرى أسلوب لتوفيق أفضل خط مستقيم لعينة من المشاهدات الخاصة بالمتغيرين X, Y. وقدم هذه الطريقة عالم الرياضيات الألمانى كارل فريدريك جاوس، وذلك لتقدير معلمات النموذج المجهولة $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$، $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\sigma\mu^2}$. وتتميز طريقة المربعات الصغرى بسهولتها النسبية، كما أنها تقود إلى تقديرات ذات خصائص إحصائية جيدة ومرغوبة.

ويمكن عرض هذه الطريقة من خلال افتراض النموذج رقم (3-3) السابق كما يلى:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$$

$$\mu i \sim N(O, \sigma^2 \mu)$$

ونرمز إلى مشاهدات العينة كما يلى:

$$(X_i, Y_i), i= 1,2,\ldots\ldots, n$$
$$E(Y_i) = \alpha + \beta X_i$$

ويوضح الشكل رقم (3-3) خط الإنحدار الحقيقى والخاص بالمجتمع $E(Y_i) = \alpha + \beta X_i$ والذى يعتبر مجهول المكان والشكل. وتحاول طريقة المربعات الصغرى تقدير هذا الخط من خلال العينة أى الوصول إلى قيم للمعلمات $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$ ويرمز لهذا الخط بـ

$$\hat{Y} i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} Xi$$

حيث أن:

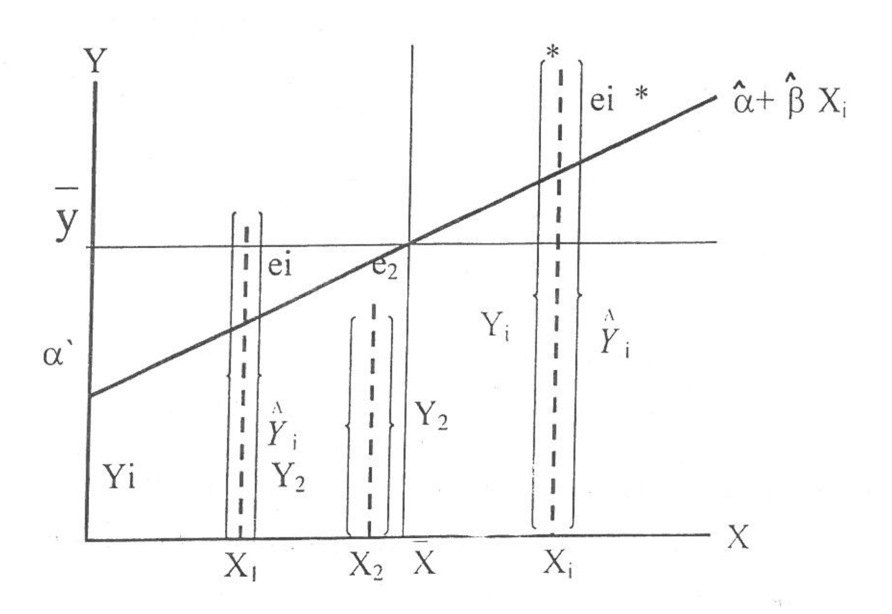
$\hat{Y}i$ قيمة مقدرة للمشاهدة الفعلية Y_i

$\hat{\alpha}$ تقدير للمعلمة الحقيقية المجهولة α

$\hat{\beta}$ تقدير للمعلمة الحقيقية المجهولة β

شكل رقم (3-3)

العلاقة $\hat{\alpha} + \hat{\beta} X$ المقدرة



من الشكل رقم (3-3) يمكن تعريف البواقى Residuals والتى نرمز لها بالرمز e_i كما يلى:

البواقى = القيم الحقيقية للمشاهدة Y_i – القيم المقدرة للمشاهدة $\hat{Yi}$ أو

$$e_i = Y_i - \hat{Yi}$$

ويمكن للبواقى أن تكون سالبة أو موجبة وفقا لموضع نقطة المشاهدة من الخط المقدر. هذا وتعطى طريقة المربعات الصغرى العادية أفضل خط مستقيم يوفق مشاهدات العينة (X, Y)، لأنها تعطى أقل مجموع مربعات رأسية لإنحرافات كل مشاهدة عن الخط المستقيم المقدر $\hat{\alpha}+\hat{\beta}Xi$ كما فى الشكل (3-3).

ونوضح ذلك كما يلى:

$$\min_{\hat{\alpha},\hat{\beta}} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots.(4-3)$$

وبما أن

$$\sum_i e_i^2 = \sum_i^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2$$

ونفاضل e_i بالنسبة لكل من $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ ومساوته بالصفر وذلك للوصول إلى نهاية صغرى لـ e_i.

$$\frac{\partial\left[\sum_i^n e_i\right]}{\partial\hat{\alpha}} = -2\sum_{i21}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \beta\hat{X}_i) = 0\ldots\ldots\ldots\ldots(5-3)$$

$$\frac{\partial\left[\sum_{i=1}^n e_i\right]}{\partial\hat{\beta}} = -2\sum_{=1}^n X_i(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = 0\ldots\ldots\ldots(6-3)$$

وإذا تم تبسيط المعادلتين رقم (3-5)، (3-6) نحصل على المعــادلات الطبيعية الخاصة بـــ $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ للخط المستقيم كما يلى:-

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (7-3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i = \hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad (8-3)$$

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \left[\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i\right]}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]^2} \qquad (9-3)$$

هذا ويكون لدينا (3-7)، (3-8) آنيتين فى مجهولين همــا $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$، ويجرى حلهم آنيا لنحصل على كل من $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ كما يلى:

$$\beta` = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(Xi - \bar{X})(Yi - \bar{Y})}{n\sum_{i=1}^{n}(Xi - \bar{X})^2} \qquad (10-3)$$

ملاحظات

1- مجموع الثابت = عدد المشاهدات مضروب فى الثابت

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{\alpha} = n\hat{\alpha}$$

2- مجموع الثابت فى المتغير = الثابت فى مجموع المتغير

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{\beta} Xi = \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} Xi$$

3- مجموع المتغير فى متغير = مجموع المتغير تربيع

$$\sum_{i=1}^{n} XiYi = \sum_{i=1}^{n} Xi^{2}$$

وتعطى الصيغة رقم (10-3) $\hat{\beta}$ المقدرة بطريقة المربعات الصغرى.

$$\alpha` = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi^{2} \sum_{i=1}^{n} Yi - \sum_{i=1}^{n} Xi \ \sum_{i=1}^{n} XiYi}{n\sum_{i=1}^{n} Xi^{2} - \left(\sum_{i=1}^{n} Xi\right)^{2}}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \ \ \bar{X} \qquad (12-3)$$

وتعطى الصيغة رقم (12-3) $\hat{\alpha}$ المقدرة بطريقة المربعات الصغرى.

ونلاحظ ما يلى على تقديرات المربعات الصغرى لـــ $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$:-

1- يتم التوصل إليهم من قيم مشاهدات العينة.

2- تعتبر تقديرات لنقطة، بمعنى أنها تعطى تقديرات مفردة لمعلمة المجتمع المجهولة.

هذا، وعندما نحصل على تقديرات المربعات الصغرى فإنه يمكننا تحديد خط الإنحدار المقدر فى الشكل رقم (3-3) والخاص بالعينة، حيث يعطى المعادلة التالية:

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$$

أو

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + e \qquad (13-3)$$

ويلاحظ أن e ترمز إلى البواقى وهو تقدير للخطأ العشوائى.

وهناك مجموع من الخواص الحسابية والإحصائية الجيدة لطريقة المربعات الصفرى عند تقديرها للمعلمات $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ ، e ويمكن عرضها كما يلى:-

3-1/2/1- الخصائص الحسابية لطريقة المربعات الصغرى:

1- يمر الخط المقدر من نقطة متوسطات العينة للمتغيرات Y ، X، ويتضح ذلك من:

أ- المعادلة رقم (3-12) والتى يمكن كتابتها على النحو التالى:

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X$$

ب- الشكل رقم (3-3) حيث تعتبر $\bar{y}$ ، $\bar{X}$ إحداثيات المتوسطات.

2- القيمة المتوسطة Y لقيم y المقدرة (أى $\hat{Y}$) تساوى القيمة المتوسطة y الفعلية (أى) حيث أن:-

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} = (\bar{y} - \hat{\beta}\bar{X}) + \hat{\beta}\bar{X} = \bar{y}$$

حيث أن

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$$

3- مجموع البواقى يساوى الصفر.

$$\sum_{i=1}^{n} ei = 0$$

بما أن

$$ei = yi - \hat{Y}i$$

$$\therefore \quad ei = \bar{y}i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X$$

وبجمع القيم:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(yi - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Xi \right) = 0$$

وإذا كان مجموع البواقى يساوى صفر فإن القيمة المتوسطة للبـــواقى تساوى الصفر أيضا:

$$\bar{e} = O$$

4- لا ترتبط البواقى ei بالمتغير Xi أى أن:

$$\sum_{i=1}^{n} Xiei = 0$$

ونحصل على هذه النتيجة من المعادلة الطبيعية رقم (3-6) كما يلى:

$$\sum_{i=1}^{n} xi\left(yi - \alpha` - \beta` Xi\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Xiei = 0$$

5- لا ترتبط البواقى بالقيمة المقدرة Yi كما يلى:

$$\sum_{i=1}^{n} Y`iei = \sum_{i=1}^{n} Y`iei = 0$$

حيث أن:

$$yi = Yi - \bar{Y}$$

$$\sum_{i=1}^{n} yi = 0$$

2/2/3ـ الخصائص الإحصائية لطريقة المربعات الصغرى:

تتميز تقديرات المعلمات بطريقة المربعات الصغرى العادية بالخصائص الإحصائية الجيدة– كما سبق عرضها فى الفصل الأول– كما يلى:–

1ـ الخطية:

كما سبق وأن عرفنا أن التقدير الخطى هو أفضل أنواع التقديرات، وتقديرات المربعات الصغرى العادية خطية فى المتغير التابع y ، أى أن تقديرات المربعات الصغرى يمكن وصفها فى صورة دالة خطية.

أ– المعلمة $\hat{\beta}$.

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Xi - \bar{X}\right)\left(Yi - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(Xi - \bar{X}\right)^2}$$

وللتسهيل بفرض أن

$$xi = Xi - \bar{X}$$
$$yi = Yi - \bar{Y}$$

وكذلك

$$\sum_{i=1}^{n} xi = \sum_{i=1}^{n} yi = 0$$

$$\therefore \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x\,iyi}{\sum_{i=1}^{n} xi^2}$$

أى أن:

$$\beta` = \frac{\sum_{i=1}^{n} xiyi}{\sum_{i=1}^{n} xi^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi\left(Yi - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n} xi^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xiYi - \bar{X}\sum_{i=1}^{n} xi}{\sum_{i=1}^{n} xi^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xiYi}{\sum_{i=1}^{n} xi^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} xi = 0$$

حيث أن:

ويمكن كتابة $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} KiYi \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (14-3)$$

وتشير المعادلة رقم (14-3) إلى أن $\hat{\beta}$ مجموع مرجح لقيم المتغير التابع Yi ، حيث تعرف الترجيحات أو الأوزان Ki:-

$$Ki = \frac{xi}{\sum_{i=1}^{n} xi^2}$$

وإذا عرفنا أن الأوزان تعتمد على انحرافات قيم Xi الثابتة عن وسطها الحسابى $\bar{X}$ فإنها تعتبر ثابتة فى المشاهدات المتكررة أيضا، يلاحظ الآتى:-

$$\sum_{i=1}^{n} Ki = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{xi}{\sum_{i=1}^{n} xi^2} \right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{\sum_{i=1}^{n} xi^2} = \frac{0}{\sum_{i=1}^{n} Xi^2} = 0$$

ب- مجموع مربعات الأوزان يساوى معكوس مجموع مربعات انحرافات Xi عن وسطها الحسابى $\bar{X}$.

$$\sum_{i=1}^{n} Ki^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{xi}{\sum_{i=1}^{n} xi^2} \right] = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} xi^2}$$

ج- مجموع مضروب الأوزان فى قيم المتغير المستقل (أو إنحرافاته) يساوى الواحد الصحيح.

$$\sum_{i=1}^{n} kixi = \sum_{i=1}^{n} Ki(X - \bar{X}) = \sum_{i=1}^{n} KiXi - \bar{X}\sum_{i=1}^{n} Ki = \sum_{i=1}^{n} KiXi$$

كما أن

$$\sum_{i=1}^{n} Kixi = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{xi}{\sum_{i=1}^{n} xi =}\right].xi = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi^2}{\sum_{i=1}^{n} xi^2} = 1$$

ب- المعلمة $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\ \bar{X}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Yi - \left(\sum_{i=1}^{n} Kiyi\right).\bar{X}$$

حيث أن

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} Kiyi$$

كما فى المعادلة رقم (3-14).

معنى ذلك أن:

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - Ki\bar{X}\right)Yi = \sum wiYi$$

حيث أن:

$$wi = \frac{1}{n} - Ki\bar{X}$$

وبما أن القوس يحتوى على ثوابت فى المشاهدات المتكررة، فــإن wi أوزان ثابتة فى المشاهدة المتكررة. وعليه فإن $\hat{\alpha}$ تعتبر دالة خطية فى قيم Y.

وبما أن قيم Y عشوائية لإعتمادها على المتغير العشوائى μ، فإن $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ تعتبر عشوائية لإعتمادها على Y ، ومن ثم تمتلكان توزيعى معاينة خاصين بهما، ينبغى وضعهما وتحديدهما، وذلك بتحديد معالم التوزيعين من وسط وتباين وتغاير، وسوف تتعرض إلى هذه المعالم من خلال التعرض لخواص عدم التحيز والكفاءة.

2ـ عدم التحيز

سبق وأن عرفنا عدم التحيز فى الفصل الأول، حيث يعتبر التقدير غير متحيز إذا كان وسطه الحسابى يساوى القيمة الحقيقية للمعلمة. أى أن $E(\hat{\theta}) = \theta$.

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} kiyi = \sum_{i=1}^{n} ki(\alpha + \beta Xi + \mu i)$$

حيث أن

أـ المعلمة $\hat{\beta}$.

$$Yi = \alpha + \beta + ui$$

$$\hat{\beta} = \alpha \sum_{1}^{n} Ki + \beta \sum_{1}^{n} KXi + \alpha \sum_{1}^{n} Ki\mu i$$

بما أن

$$\sum_{i=1}^{n} Ki = 0$$

$\therefore$

$$\hat{\beta} = \beta + \sum_{1}^{n} Ki\mu i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots(15-3)$$

وبأخذ توقع الطرفين، كما سبق ذكره

$$E(\hat{\beta}) = E\left[\beta + \sum_{i=1}^{n} Ki\mu i \right]$$

$$E(\hat{\beta}^{`}) = \left[\beta + \sum_{i=1}^{n} KiE(\mu i) \right]$$

من خصائص الخطأ العشوائى توقعه يساوى صفر، فإن

$$E(\hat{\beta}^{`})=\beta$$

معنى أن المعلمة $\hat{\beta}^{`}$ تعتبر تقدير غير متحيز للمعلمة الحقيقية β.

أـ المعلمة $\alpha^{`}$.

$$\hat{a} = \bar{Y} + \hat{\beta}\ \bar{X}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} Yi + \left[\sum_{i}^{1} KiXi \right] . \bar{X}$$

$$\alpha^{`} = \sum_{i} \left(\frac{1}{n} - Ki\bar{X} \right) Yi$$

$$= \sum_{i} \left(\frac{1}{n} - Ki\bar{X} \right) (\alpha + \beta Xi + ui)$$

$$= \alpha - \alpha \bar{X} \sum Ki + \beta \bar{X} - \beta \bar{X} \sum KiXi +$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - Ki\ \bar{X} \right) Ui$$

- مجموع الثابت = عدد المشاهدات × الثابت

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha = n\alpha$$

- ثابت مضروب فى مجموع متغير على عدد المشاهدات = الثابت × الوسط الحسابى للمتغير

$$\beta \sum_{i=1}^{n} Xi . \frac{1}{n} = \beta \bar{X}$$

$$= \alpha + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - Ki\,\bar{X}\right)\mu i ....(16-3)$$

وعلى اعتبار أن خاصية عدم التحيز هى $E(\theta) = \theta$

فإن

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{n} - Ki\,\bar{X}\right)E(ui) ....(16-3)$$

$$\therefore \quad E(\hat{\alpha}) = \alpha$$

معنى ذلك أن تقدير المعلمة $\hat{\alpha}$ هو تقدير غير متحيز للمعلمة الحقيقية α.

3ـ الكفاءة Efficiency

نعنى بالكفاءة أن طريقة المربعات الصغرى لها أقل تباين ممكن من بين طرق التقدير الأخرى، التى قد تكون أيضا غير متحيزة، وقد قدم الرياضى الروسى جاوس ماركوف نظرية أثبتت فيها أن طريقة المربعات الصغرى أفضل طرق التقدير لأنها الوحيدة من بين كل هذه التقديرات التى تتمتع بالكفاءة.

نظرية جاوس ماركوف:

تنص النظرية على أن طريقة المربعات الصغرى العادية هى أفضل تقدير غير خطى غير متحيز.

ويمكن شرح نظرية جاوس ماركوف من خلال:-

أ- الحصول على تباين المعلمات $\hat{\beta}$ ، $\hat{\alpha}$ بطريقة المربعات الصغرى.

ب- إفتراض تقدير آخر غير متحيز ثم نحصل على تباين معلمات هذا التقدير.

ج- نقارن بين تباين تقديرات المربعات الصغرى للمعلمات، وتباين نفس المعلمات بالطريقة الأخرى، من ثم إصدار حكم الكفاءة لأيهما.

أ- تباين المعلمات $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ المقدرة بطريقة المربعات الصغرى.

يعرف التباين بأنه مربع الفرق بين المعلمة المقدرة ووسطها الحسابى (توقعها)، ويمكن عرض صيغة التباين بشكل عام كما يلى:

$$Var(\hat{\theta}) = E\left[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right]^2 = E\left[\theta - \theta\right]^2 \;..........(17-3)$$

وبتطبيق الصيغة رقم (3-17) على المعلمات $\hat{\beta}$ ، $\hat{\alpha}$ والمقدرة بطريقة المربعات الصغرى، نحصل على تباين كل معلمة.

أولا: المعلمة $\beta`$.

تباينها:-

$$Var(\hat{\beta}) = E\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right]^2 = E\left[\hat{\beta} - \beta\right]^2 \;.......... \quad (17-3)$$

ومن الصيغة رقم (3-15) نجد أن:-

$$\hat{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^{n} Ki\mu i$$

$$\hat{\beta} - \beta = \sum_{u=1}^{n} Ki\mu i$$

بما أن

$$Var(\beta`) = E[\beta` - \beta]^2$$

$$Var(\beta`) = E\left[\sum_{i} Kiui\right]^2$$

$$\therefore \quad Var(\beta`) = \sum_{i=1}^{n} K_1^2 E(U_1^2) + 2\sum_{i<j}^{n} \sum^{n} KijE(uiuj)$$

وبأخذ الفرضين التاليين فى الإعتبار :-

$$E(\mu i)2 = \sigma^2$$
$$E(\mu i \nu i) = 0$$

وكذلك الصيغة:-

$$\sum_{i=1}^{n} Ki^2 = \frac{1}{\sum xi^2}$$

فإن:-

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma 2 \sum^{n} K_i^2$$

معنى ذلك أن تباين المعلمة $\hat{\beta}$:-

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 . \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} ....(18-3)$$

والخطأ المعيارى للمعلمة $\beta`$، هو الذى يعرف بأنه الجــذر التربيعــى لتباينها هو:

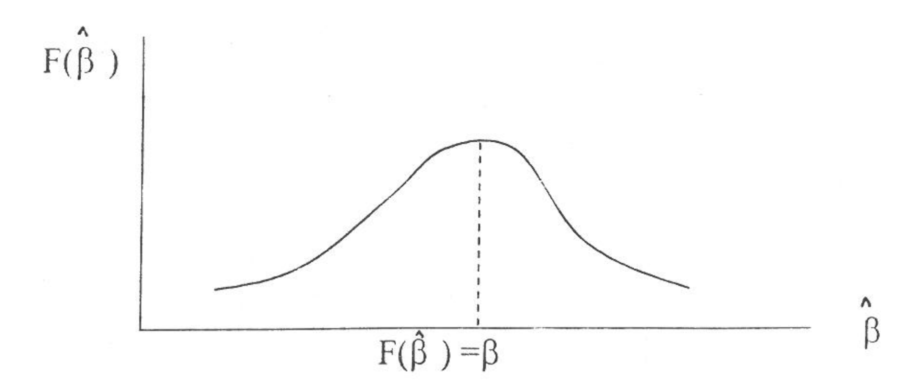
$$S.E(\beta`) = \sigma . \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} ....(19-3)$$

وترجع أهمية الخطأ المعيارى للتقدير إلى استخدامه فى إختبــارات المعنويــة الخاصة بعالم العلاقة الإقتصادية، لمعرفة أيا منها معنوى وأيهما غير معنــوى احصائيا، وكذلك فى تقدير فترات الثقة للمعلمات. ويلاحظ أن تباين المعلمة $\hat{\beta}$.

يعتمد طرديا على تباين الخطأ العشوائى، وعكسيا على القيمة $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ والتى تقيس انتشار قيم المتغير المستقل (المفسر) X. من ثم يكون للمعلمة $\beta`$ توزيع المعاينة كما فى الشكل رقم (3-4).

شكل رقم (3-4)

توزيع المعنية للمعلمة $\hat{\beta}`$



والشكل رقم (3-4) هو التوزيع الطبيعى للمعلمة $\hat{\beta}$، حيث أن المعلمة $\hat{\beta}$ دالة خطية فى المتغير العشوانى μi كما توضح الصيغة التالية:

$$\hat{\beta} = \beta + \sum_{1} KiUi$$

ومن ثم يكون للمقدرة $\hat{\beta}$ توزيعا طبيعياً بمتوسط يساوى القيمة المتوقعة لها وتباين كما هو محسوب فى المعادلة رقم (3-18)، أى أن

$$\beta` \sim N\left(\beta, \sigma^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$$

ثانيا: المعلمة $\hat{\alpha}$

تباينها:-

$$Var(\hat{\alpha})=E(\hat{\alpha}-E(\hat{\alpha}))^2$$
$$Var(\hat{\alpha})=E(\hat{\alpha}-\alpha)^2$$

ومن ثم المعادلة رقم (3-16):

$$\hat{\alpha}=\alpha+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-Ki\bar{X}\right)ui$$

$$Var(\hat{\alpha})=E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-Ki\bar{X}\right)ui\right]^2$$

$$Var(\hat{\alpha})=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-Ki\bar{X}\right)^2$$

$$Var(\hat{\alpha})=\sigma^2\left[\frac{1}{n}+\bar{X}^2\sum_{i=1}^{n}K_i^2-2\frac{\bar{X}}{n}\sum_{i=1}^{n}Ki\right]$$

$$Var(\hat{\alpha})=\sigma^2\left[\frac{1}{n}+\frac{X^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right]$$

ويمكن كتابة الصيغة السابقة كما يلى:

$$Var(\alpha)=\sigma^2.\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}X_i^2}.................(20-3)$$

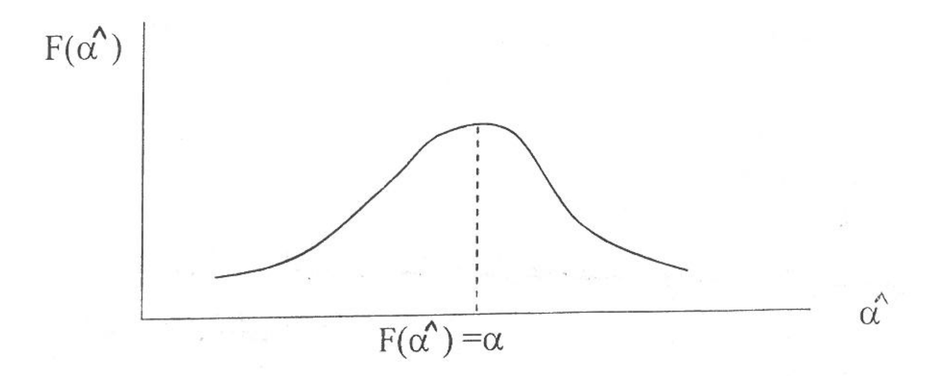
والخطأ المعيارى للمعلمة $\hat{\alpha}$:

$$S.E(\hat{\alpha}) = \sigma.\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} \quad \text{..............................} (21-3)$$

ويوضح الشكل رقم (3-5) توزيع المعينة للمعلمة $\hat{\alpha}$.

شكل رقم (3-5)

توزيع المعنية للمعلمة $\hat{\alpha}$



وللمعلمة $\hat{\alpha}$ توزيع طبيعى أيضا، حيث أنها دالة خطية فى المتغير العشوائى وفقا لطبيعة الصيغة التالية:

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum^{n}\left(\frac{1}{n} - Ki\bar{X}\right)ui$$

ومن ثم يكون للمعلمة $\hat{\alpha}$ متوسط يساوى توقعها، وتباين كما هو محسوب فى المعادلة رقم (3-20).

$$\hat{\alpha} \sim N(\alpha, \sigma^2 . \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2})$$

ب- افتراض تقدير آخر غير متحيز للمعلمات α ، β.

بفرض تقدير آخر - غير المربعات الصغرى- لمعلمات النمــوذج α ، β كما يلى:

أولا: المعلمة β

بفرض التقدير التالى للمعلمة β

$$\hat{\hat{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} CiYi \text{..........................} \qquad (22-3)$$

حيث أن:

$$ci = ki + di$$
$$di \neq 0$$

علما بأن di ثوابت مختارة بطريقة تحكمية، ويمكن وضع التقــدير $\hat{\hat{\beta}}$ **على الشكل التالى:-**

$$\hat{\hat{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} ci(\alpha + \beta Xi + ui)$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} ci + \beta\sum_{i=1}^{n} CiXi + \sum_{i=1}^{n} Ciui \text{..........................} (23-3)$$

ويمكن اختيار مدى تحيز أو عدم تحيز للمعلمة $\hat{\hat{\beta}}$ كما يلى:

فإذا كان

$$E(\hat{\hat{\beta}}) = \beta$$

يكون التقدير غير متحيز.

فإذا كان: (1)

$$\sum_{i=1}^{n} ci = 0$$

أو

$$\sum_{i=1}^{n} Ki + \sum_{i=1}^{n} di = 0$$

فإن

$$\sum_{i=1}^{n} di = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} CiXi = 1 \qquad (2)$$

و

$$\sum_{i=1}^{n} KiXi + \sum_{i=1}^{n} diXi = 1$$

أى أن

$$\sum_{i=1}^{n} diXi = 0$$

معنى ذلك أن di كوزن نسبى يجب أن يحقق شرطين

$$\sum_{i=1}^{n} di = 0 .... \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} diXi = \sum_{i=1}^{n} diXi = 0 .... \qquad (2)$$

وإذا رجعنا إلى التقدير $\ddot{\beta}$ كما فى الصيغة (3-23) التالية:-

$$\ddot{\beta} = \alpha \sum_{i=1}^{n} ci + \beta \sum_{i=1}^{n} CiXi + \sum_{i=1}^{n} Ciui$$

$$\therefore \quad \beta` = \beta + \sum_{i=1}^{n} Ciui$$

بما أن

$$E(ui)=0$$

$$\therefore \quad E(\hat{\hat{\beta}})=\beta$$

معنى ذلك أن $\hat{\hat{\beta}}$ تقدير غير متحيز للمعلمة β.

ويمكن الحصول على تباين التقدير الخطى غير المتحير للمعلمة $\hat{\hat{\beta}}$ من خلال الصيغة التالية:

$$Var(\hat{\hat{\beta}})=E[\hat{\hat{\beta}}-E(\hat{\hat{\beta}})]^2$$

$$Var(\hat{\hat{\beta}})=E[\hat{\hat{\beta}}-\beta]^2$$

$$Var(\hat{\hat{\beta}})=E\left[\sum_{i=1}^{n} ciui\right]^2$$

$$Var(\hat{\hat{\beta}})=E\left[\sum_{i=1}^{n} ci^2ui^2+z\sum_{i<j}^{n}\sum^{n} CiCjuiuj\right]$$

$$Var(\hat{\hat{\beta}})=\sigma^2\sum_{i=1}^{n} C_i^2$$

$$Var(\hat{\hat{\beta}})=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}(Ki+di)^2$$

$$Var(\hat{\hat{\beta}})=\sigma^2\left[\sum_{i=1}^{n} Ki^2+\sum_{i=1}^{n} di^2+2\sum_{i=1}^{n} Kidi\right]$$

بما أن

$$\sum_{i=1}^{n} Kidi = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{xi}{\sum_{i} xi^2} \right) di$$

$$= \frac{\sum_{i}^{n} xidi}{\sum_{i=1} xi^2} = 0$$

$\therefore$

$$Var(\hat{\hat{\beta}}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} K_i^2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} d_i^2 .... \qquad (24-3)$$

$$Var(\hat{\hat{\beta}}) = Var(\hat{\beta}) + \sigma^2 \sum_{i=1} d_i^2$$

حيث أن

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} K_i^2$$

وعلى اعتبار أن

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 > 0$$

حيث أن $d \sum$ هى التى تساوى صفر وعلى ذلك:

$$Var(\hat{\hat{\beta}}) \geq Var(\hat{\beta})$$

ومن ثم فإن تقدير المربعات الصغرى والخاص بالمعلمة $\hat{\beta}$ يتميز بأنه له أدنى تباين من بين كل التقديرات الخطية غير المتحيزة للمعلمة β وبالتـــالى يتمتـــع بالكفاءة.

ثانيا: المعلمة α

بفرض التقدير التالى للمعلمة $\hat{\hat{\alpha}}$

$$\hat{\hat{\alpha}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Yi - \left[\sum_{i=1}^{n} CiYi\right].\bar{X} \quad\quad (25-3)$$

يمكن اختيار مدى تحيز المعلمة $\hat{\hat{\alpha}}$ أو عدم تحيزها كما يلى:-

$$\hat{\hat{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{n} - Ci\,\bar{X}\right].\bar{y}$$

$$\hat{\hat{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n} Y\left(\frac{1}{n} - Ci\,\bar{X}\right)\left(\alpha + \beta\,\bar{x}i + ui\right)$$

$$\hat{\hat{\alpha}} = \alpha - \alpha\,\bar{X}\sum_{i=1}^{n} ci - \beta\,\bar{X} - \beta\bar{X}\sum_{i=1}^{n} CiXi$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - Ci\,\bar{X}\right)ui$$

وعلى اعتبار أن:-

$$\sum_{i=1}^{n} Ci = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} CiXi = 1$$

$$\hat{\hat{\alpha}} = \alpha + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - Ci\,\bar{X}\right)ui \quad\quad (26-3)$$

وإذا عرفنا أن المعلمة تكون غير متحيزة وفقا للصيغة التالية:

$$E(\theta`)=\theta$$

$\therefore$

$$E(\hat{\hat{\alpha}}) = \alpha + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - Ci\,X\right)E(ui)$$

وعلى اعتبار أن

$$E(\mu i)=0$$

$\therefore$

$$E(\hat{\hat{\alpha}})=\alpha$$

وهذا يعنى أن التقدير $\hat{\hat{\alpha}}$ هو تقدير غير متحيز للمعلمـــة الحقيقيـــة α.
ويمكن الحصول على تباين التقدير الخطى غير المتحيز للمعلمة $\hat{\hat{\alpha}}$ من خـــلال الصيغة التالية:-

$$Var(\hat{\hat{\alpha}}) = E(\hat{\hat{\alpha}} - E(\hat{\hat{\alpha}}))^2$$

$$Var(\alpha`) = E(\hat{\hat{\alpha}} - \alpha)^2$$

على اعتبار أن:

$$\hat{\hat{\alpha}} = \alpha + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - Ci\,\bar{X}\right)ui$$

$$Var(\hat{\hat{\alpha}}) = E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - Ci\,\bar{X}\right)ui\right]^2$$

$$Var(\hat{\hat{\alpha}}) = \sigma^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - Ci\,X\right)^2$$

$$Var(\hat{\hat{\alpha}}) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^{n} C_i^2 - 2\frac{\bar{X}}{n} \sum_{i=1}^{n} Ci \right]$$

$$Var(\hat{\hat{\alpha}}) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \right]$$

$$Var(\hat{\hat{\alpha}}) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^{n} (Ki + di)^2 \right]$$

$$Var(\hat{\hat{\alpha}}) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \bar{X}^2 \left(\sum_{i=1}^{n} Ki^2 + \sum_{i=1}^{n} di^2 + 2\sum_{i=1}^{n} Kidi^2 \right) \right]$$

$$Var(\hat{\hat{\alpha}}) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^{n} Ki^2 + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^{n} di^2 + 2\bar{X}^2 \sum_{i=1}^{n} Kidi^2 \right]$$

وعلى اعتبار أن:-

$$\sum_{i=1}^{n} K_i^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Kidi = 0$$

$$Var(\hat{\hat{\alpha}}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^{n} di^2 \right)$$

$$Var(\alpha`) = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{n}\right) + \sigma^2\left(\bar{X}^2 \sum_{i=1}^{n} di^2\right) \ldots\ldots.(27-3)$$

وحيث أن:-

$$Var(\hat{\hat{\alpha}}) = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} xi^2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} di^2 > 0$$

$$Var(\hat{\hat{\alpha}}) \geq Var(\hat{\alpha})$$

معنى ذلك أن تقدير المربعات الصغرى والخاص بالمعلمة $\alpha`$ يتميز بأن له أدنى تباين من بين كل التقديرات الخطية غير المتحيزة للمعلمة α.

وبالتالى يتمتع بالكفاءة.

نخلص من الجزء السابق أن تقديرات المربعات الصغرى العادية للمعلمات الحقيقية للمجتمع α، β هى أحسن تقدير خطى غير متحيز، كما ذكر جاوس ماركوف.

3/3ـ الإختبارات الإحصائية لتقديرات المربعات الصغرى

بعد إثبات أن تقديرات المربعات الصغرى العادية، هى أحسن تقدير خطى غير متحيز، من خلال نظرية جاوس ماركوف، نحاول فى هذا الجزء من الفصل الثالث، إجراء اختبارات المعنوية الخاصة بالمعلمات $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$. لكن تباين هذه المعلمات يحتوى على معلمة مجهولة وهى σ^2، والتى تمثل تباين

الخطأ العشوائى، وقد سبق وأن ذكرنا أن مجموع مربعات البواقى يمثل تقدير للخطأ العشوائى. ومن ثم فإن تباين البواقى يعتبر تقدير غير متحيز لتباين الخطأ العشوائى.

1/3/3- تباين البواقى تقدير غير متحيز لتباين الخطأ العشوائى:

بفرض الصيغة التالية:-

$$\sigma'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} \quad .(28-3)$$

وعلى اعتبار أن صيغة عدم التحيز هى:-

$$E(\sigma'^2) = \sigma^2$$

ويمكن إثبات أن تقدير تباين البواقى σ'^2 هو تقدير غير متحيز لتباين الخطأ العشوائى كما يلى:-

$$Yi = \alpha + \beta X_i + u_i \quad (29-3)$$

ومن ثم:-

$$\bar{Y} = \alpha + \beta \bar{X} + \bar{u} \quad (30-3)$$

وبإدخال الإنحرافات

$$yi = \beta x_i + (ui - \bar{u}) \quad (31-3)$$

$$\therefore$$

$$e_i = y_i - \beta x_i \quad (32-3)$$

وبالتعويض من الصيغة رقم (31-3) فى الصيغة رقم (32-3) نحصل على الصيغة التالية:-

$$e_i = \hat{\beta} x_i + (ui - \bar{u}) - \hat{\beta} x_i$$

$$= - (\beta` - \beta)\, x_i + (ui - \bar{u}) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33\text{-}3)$$

وبتربيع القيم وجمعها فى الصيغة رقم (33-3) نحصل على مجمــوع مربعات البواقى كما يلى:-

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \left(\hat{\beta} - \beta\right)^2 \sum_{i=1}^{2} x_i^2 + E\sum\left(ui - \bar{u}\right)^2 - 2\left(\grave{\beta} - \beta\right)^2 + \sum^{n} Xi\left(\mu i - \bar{\mu}\right) \ldots (34-3)$$

وبأخذ القيمة المتوقعة (34-3) نحصل على

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = (\beta` - \beta)^2 \sum_{i=1}^{2} x_i^2 E(\beta` - \beta)^2 + E\sum\left(ui - \bar{u}\right)^2$$

$$- 2E(\beta` - \beta)^2 \sum_{i=1}^{n} X_i \left(ui - \bar{u}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35-3)$$

وعلى اعتبار الآتى:-

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 E(\hat{\beta} - \beta)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sigma_u^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (35-3)/1$$

حيث أن:

$$E(\hat{\beta} - \beta)^2 = \frac{1}{\sum_{n}^{1} x_i^2} \cdot \sigma_\mu^2$$

$$E\sum_{i=1}^{n}\left(ui - \bar{u}\right)^2 = E\left[\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} ui\right)^2\right]$$

حيث أن:

$$n\sum ui = \frac{1}{n}\sum u_i^2$$

كذلك توقع الخطأ العشوائى أى وسطه الحسابى بصفر ، فإن

$$u\sum(ui-\bar{u})^2 = E\left[\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum ui\right)^2\right] = (n-1)\sigma_u^2 ....(35-3)/2$$

$$E(\hat{\beta}-\beta)\sum_{i=1}^{n} xi(ui-\bar{u}) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}uixi}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}uixi - \bar{\mu}\sum_{i=1}^{n}xi\right)$$

$$E(\beta-\beta)\sum_{i=1}^{n} xi(ui-\bar{u}) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}uiXi}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}\right] = \sigma^2 ....(35-3)/3$$

من الصيغ 1/(3-35) ، 2/(3-35) ، 3/(3-35) يمكن الحصول علـــى الصيغة التالية:-

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}e_i^2\right) = \sigma_u^2 + (n-1)\sigma_u^2 - 2\sigma_u^2 = (n-2)\sigma_u^2$$

وبالرجوع إلى الصيغة رقم (3-28):

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{n-2}$$

فإن القيمة المتوقعة

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 u$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{n-2} = \frac{(n-2)\sigma_u^2}{(n-2)} = \sigma_u^2 ....(36-3)$$

معنى ذلك ان التقدير $\hat{\sigma}^2$ هو تقدير غير متحيز للمعلمة الحقيقية σ_u^2، ومن ثم لو تم سحب عدد كبير من العينات التى تحتوى n من المشاهدات، وقدرنا من كل منها خط إنحدار، وتم حساب البواقى المرتبطة بكل خط ثم حسبنا التباين الخاص به وفقا للصيغة رقم (3-28)، فإنه يكون لدينا عدد كبير من تقديرات تباين البواقى تتوزع حول وسط حسابى هو المعلمة الحقيقية σ^2.

2/3/3ـ اختبارات المعنوية:

قبل إجراء اختبارات المعنوية والفروض لابد من إدخال الفرض الخاص بتحديد توزيع المتغير العشوائى u على أنه التوزيع الطبيعى $ui \sim N(O, \sigma`^2)$. حيث أنه لم يتم استخدام ذلك الفرض حتى هذه المرحلة. وبما أن ui موزعة توزيع طبيعى، وان yi ، `α ، `β تعتمد على المتغير العشوائى ui، فيكون لهم أيضا توزيع طبيعى على النحو التالى:-

$$ui \sim N(O, \sigma`^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(37\text{-}3)$$

$$yi \sim N(\alpha+\beta Xi, \sigma_u^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(38\text{-}3)$$

$$\hat{\alpha} \sim N(\alpha, \frac{\sum_{i=1}^{n} X_1^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_1^2}.\sigma_u^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(39-3)$$

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \frac{\sigma_u^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_1^2}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(40-3)$$

ونبدأ من هذه الفروض لإجراء الاختبارات الإحصائية.

أولا: الإختبارات الخاصة بالمعلمة $\hat{\beta}$.

يمكن استخدام الصيغة رقم (3-40) لتكون نقطة البداية لإجراء **الاختيبارات على المعلمة $\hat{\beta}$.**

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \frac{\sigma_u^2}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2})$$

وبفرض تعريف التغير Z_1 على أنه موزع توزيعا طبيعيا معياريا كما يلى:

$$Z_1 = \frac{\hat{\beta} - E(\hat{\beta})}{\hat{\sigma}(\hat{\beta})} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\frac{\sigma u}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}} = \frac{(\hat{\beta} - \beta)\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}{\sigma \mu} \sim (0,1) ......(41-3)$$

كما أن المتغير V_1^2 (التباين) يتبع q^2 ، X^2 بـ (n-2) درجات حرية وبصورة مستقلة عن توزيع Z_1.

$$V_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sigma_u^2} = \frac{(n-2)\sigma'^2}{\sigma_u^2} \sim X^2(n-2) ....(42-3)$$

وبالتالى فإن t الإحصائية من الصيغة رقم (3-41) , (3-42)

$$t = \frac{Z1}{\sqrt{\frac{V_1^2}{(n-2)}}} \sim tn-2 ....(43-3)$$

وتتوزع وفقا لتوزيع t بدرجات حرية (n-2) أى أن:

$$t = \frac{(\beta` - \beta)\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sigma^2} \sim tn - 2............(44 - 3)$$

ويلاحظ انه تم التخلص من القيمة الحقيقية لـــ σ بإستعمال إحصائية t، وبالتالى تمكنا من الحصول على دالة اختبار تعتمد علـــى العينـــة وقيمـــة β، وبالتالى تمكنا من الحصول على دالة اختبار تعتمـــد علـــى العينـــة وقيمـــة β الافتراضية.

ولإجراء اختبارات الفروض، نفترض الآتى:-

- الفرض العدم0= β: H0 – يعنى عدم وجود علاقة معنوية بـــين المتغيـــر المستقل والمتغير التابع.
- الفرض البديل 0≠ β: H1 – يعنى وجود علاقة معنوية بين المتغير المستقل والمتغير التابع.

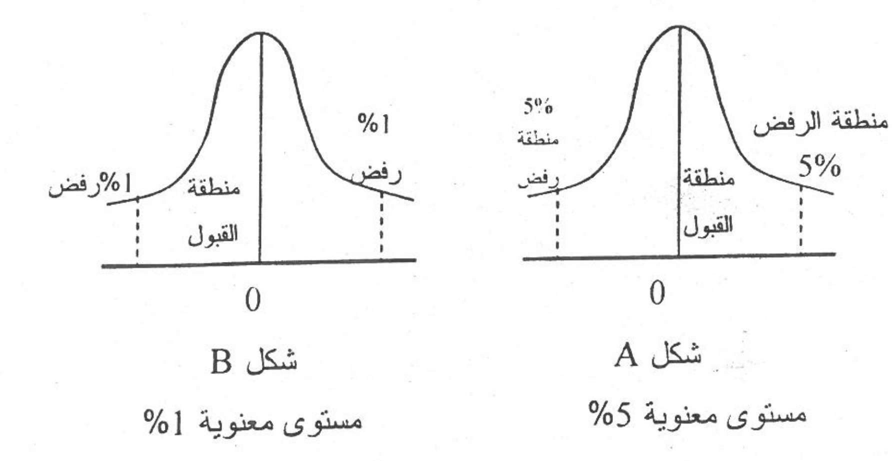
وهذا يعنى تعويض القيمة الإفتراضية β_0 بدلا من β فى الصيغة رقـــم (3-44) ويتخذ القرار الإحصائى برفض H0 إذا وقعت القيمة المحسوبة لـــ t فى المنطقة الحرجة المحددة من توزيع t بدرجات حرية (n-2). ونقبل الفرض البديل، أى وجود علاقة معنوية بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

هذا وتسمى المنطقة التى نقبل بداخلها فرض العدم H0 "منطقة القبول" أما المنطقة التى نرفض بداخلها فرض العدم فتسمى "منطقة الرفض".

ويوضح الشكل رقم (3-6) منطقتى الرفض والقبول عند مستوى 5%، 1%.

شكل رقم (3-6)

منطقة الرفض والقبول وفقا لمستوى المعنوية



شكل A
مستوى معنوية 5%

شكل B
مستوى معنوية 1%

ثانيا: الاختبارات الخاصة بالمعلمة $\hat{\alpha}$

يمكن استخدام الصيغة رقم (3-39) لتكون نقطة البداية لإجراء الاختبارات على المعلمة α`.

$$\alpha` \sim n\left(\alpha, \frac{\sum_{I=1}^{N} X_I^2}{n\sum_{I=1}^{N} x_i^2} . \sigma_u^2\right)$$

بفرض تعريف المتغير Z_2 على أنه متغير موزع توزيعاً طبيعياً معيارياً كما يلى:

$$Z_1 = \frac{(\alpha` - \alpha)\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sigma u\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x^2}} \ldots\ldots(45-3)$$

كما أن V_2^2 التباين:-

$$V_2^2 = \frac{(n-2)\sigma^2}{\sigma u^2} \ldots\ldots(45-3)$$

V_2^2 موزعة حسب q^2 ، X^2 بدرجات حرية (n-2). ومــن الصــيغة (45-3)، (46-3) تكون t الإحصائية:-

$$t = \frac{(\alpha` - \alpha)\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sigma`\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} X^2}} \sim t-2 \ldots\ldots(47-3)$$

ويلاحظ انه تم التخلص من σ باستعمال إحصائية t، وبالتالى تمكننا من الحصول على دالة اختبار تعتمد على العينة وقيمة α الافتراضية. ويمكن إجراء اختبارات الفروض كما فى المعلمة `β. ومعنى فــرض العــدم هنــا أن خــط الإنحدار الحقيقى فى المجتمع يمر بنقطة الأصل (H0, α=0)، أمــا الفــرض البديل (H1, α≠1) يعنى أن الجزء المقطوع من محور يختلف معنويــا عــن الصفر.

3/3/3ـ إنشاء فترات الثقة للمعلمات $\hat{\beta}$ ، $\hat{\alpha}$

يمكن إنشاء فترات الثقة للمعلمات $\hat{\beta}$ ، $\hat{\alpha}$ باستعمال توزيع t تعويضا عن التوزيع الطبيعى حيث نحصل على:-

$$\Pr\{-t_{E/2} \le t \le t_{E/2}\} = 1 - E \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(48-3)$$

ونلاحظ أن ε-1 هى مستوى الثقة للإختبار، ويمكن تطبيق الصيغة رقم (48-3) على المعلمات $\hat{\beta}$ ، $\hat{\alpha}$ كما يلى:

بالنسبة $\hat{\beta}$:-

$$t = (\hat{\beta} - \beta) / S.e(\hat{\beta})$$

وبالتعويض فى الصيغة رقم (40-3)

$$\Pr\left\{-t_{E/2} \le \frac{(\hat{\beta} - \beta)}{S.e(\hat{\beta})} \le t_{E/2}\right\} = 1 - \varepsilon$$

ويمكن كتابتها كما يلى:

$$\Pr\left\{\hat{\beta} - t1_{/2}.S.e(\hat{\beta}1) \le \beta \le \hat{\beta} + t_{E/2}.S.e(\beta)\right\} = 1 - \varepsilon..(49-3)$$

وتعطى المعادلة رقم (49-3) ، %(1-3) 100 فترة منتظمة للمعلمة β ويكون حداً الثقة % (ε-100) هما:

$$\beta \pm t\varepsilon_{/2} . S.e\,(\hat{\beta}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(50-3)$$

بالنسبة للمعلمة $\hat{\alpha}$.

باستخدام الصبغة رقم (3-48) فإن:

$$\Pr\left\{-t_{E/2} \leq \frac{(\alpha`-\alpha)}{S.e(\alpha`)} \leq +t_{E/2}\right\} = 1-\varepsilon..........(51-3)$$

وبالتالى:

$$\alpha` \pm t_{\varepsilon/2}\, S.e\,(\hat{\alpha})..............................(52-3)$$

وقبل ختام هذا الجزء نشير إلى أن المعلمة σ_u^2يمكن الحصـــول علـــى الاختبارات الخاصة بها من توزيع X^2 حيث تعطى:

$$\Pr\left\{X^2_{1-E/2} < \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < X^2 E_{/2}\right\} = 1-\varepsilon..........(53-3)$$

فترة الثقة $100(1\text{-}\varepsilon)\%$ للمعلمة σ_u^2 بحدى ثقة:

$$\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{X^2_{E/2}}, \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{X_1^2-_{E/2}}$$

3 /4ـ قياس القدرة التفسيرية للنموذج .

بعد تقدير معالم العلاقات الإقتصادية بإستخدام طريقة المربعات الصـــغرى، يتطلب الأمر معايير للحكم على جودة التقديرات، وهناك معيارين هامين:-

1- الأخطاء المعيارية لتقديرات المعالم، وقد تم مناقشتها فى الجزء السابق من هذا الفصل.

2- معامل التحديد R^2، وسيتم مناقشته فى هذا الجزء من الفصل الثالث:

1/4/3 معامل التحديد R^2

يعرف معامل التحديد R^2 بأنه النسبة من التغير الإجمالى فى y والذى يفسره إنحدار Y على X ، ومن ثم يوضح نسبة التغيرات التى تحدث فى المتغير التابع Y بسبب المتغير المستقل (التفسيرى) X. ويمكن حسابه كما يلى:-

يعرف التغير الكلى للمتغير التابع Y ، بأنه مجموع مربعات إنحرافات قيم المتغير التابع Y عن وسطه الحسابى $\bar{Y}$ [Total sum of squares] ونرمز له بالرمز TSS.

$$TSS = \sum_{i=1}^{n}\left(Yi - \bar{Y}\right)^2 \quad ....(54-3)$$

ويمكن تقسيم مجموع المربعات TSS إلى جزأين:-

1- الجزء الأول ويعرف بإسم مجموع مربعات الإنحدار ونرمز له بالرمز "ESS" أو يمكن تعريفه بأنه مجموع المربعات المفسرة Explained Sum of Squares، ويشير إلى التغير أو الإختلاف المفسر أى مقدار المتغير فى Y الذى يرجع إلى X. وهو عبارة عن مجموع مربعات إنحراف قيم `Y عن وسطها الحسابى $\bar{Y}$. أى أن:

$$ESS = \sum_{i=1}^{n}\left(Yi - \bar{Y}\right)^2 \quad ....(55-3)$$

2- الجزء الثانى: يسمى مجموع مربعات البواقى Residual sum of Squares ونرمز له بالرمز RSS، ويشير إلى التغير أو الإختلاف غير المفسر الذى لا يرجع إلى المتغير التفسيرى X وإنما يرجع إلى التغيرات العشوائية فى النموذج.

وهو عبارة عن مجموع مربعات إنحراف Y عن القيمة المقدرة لها.

$$RSS = \sum_{i=1}^{n}\left(Yi - \hat{Y}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(56-3)$$

ويمكن توضيح كيفية الحصول على الصيغ (3-54) و (3-55) و (3-56) كما يلى:-

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Yi - \bar{Y}\right)^2 = \sum\left[\left(Yi - \hat{Y}\right) + \left(\hat{Y}i - \bar{Y}\right)\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(57-3)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Yi - \bar{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(Yi - \hat{Y}\right)^2 + 2\left(Yi - \hat{Y}1\right)\left(\hat{Y}i - \bar{Y}\right) + \left(\hat{Y}i - \bar{Y}\right)^2\right] \ldots(58-3)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(Yi - \hat{Y}i\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(Yi - \hat{Y}\right)\left(\hat{Y}`i - \bar{Y}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}`i - \bar{Y}\right)^2\right] \ldots(58-3)$$

وبالاستعانة بالمعادلتين الطبيعتين أرقام (3-7) ، (3-8) فإن الحد الأوسط $2\sum_{i=1}^{n}(Yi - \hat{Y}i)(\hat{Y}i - Y)$ فى الصيغة رقم (3-`58) يساوى صفر، معنى ذلك أن مجموع المربعات الكلى يمكن كتابته على النحو التالى:

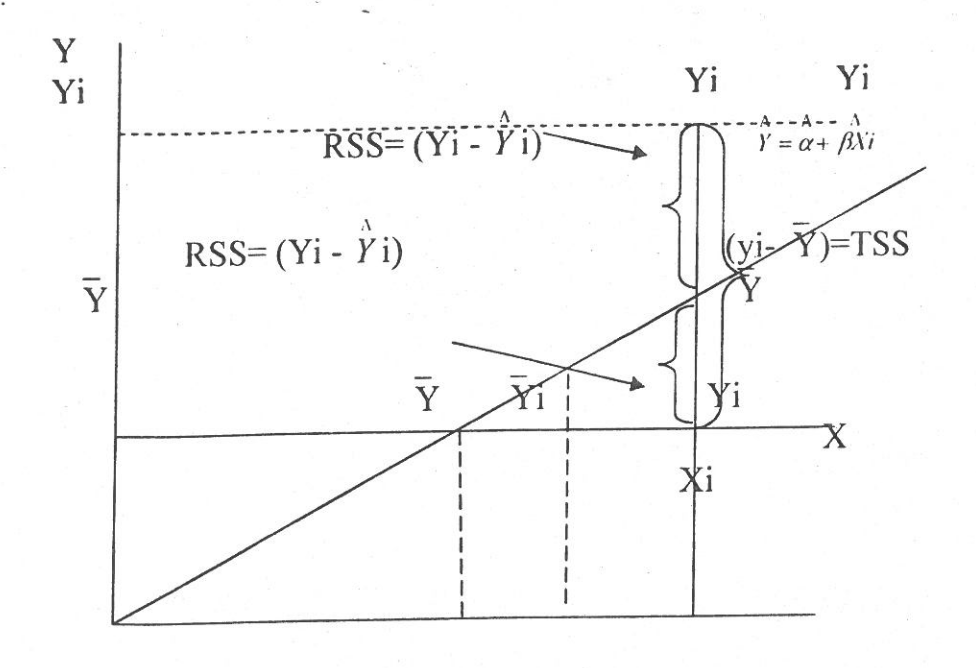
$$\sum_{i=1}^{n}\left(Yi - \bar{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(Yi - \hat{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}i - \bar{Y}1\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(59-3)$$

$$TSS = RSS + ESS \ldots\ldots\ldots\ldots (60-3)$$

ويمكن توضيح طريقة تقسيم مجموع التغير الكلى فى المتغير التابع بيانيا كما فى الشكل رقم (3-7).

شكل رقم (3-7)

تقسيم مجموع التغير الكلى فى المتغير التابع (Yi)



وتمثل المسافة الرأسية بين النقطتين Xi, Yi، والخط الأفقى الذى يمثل الوسط الحسابى التابع $\bar{Y}$ الانحراف $(Yi-\bar{Y})$ لذلك فإن مجموع مربعات الانحراف الكلى يعبر عن الانحراف الكلى عن الخط الأفقى $\sum_{i=1}^{n}(Yi-\bar{Y})^2$، والإنحراف $(\hat{Y}i-\bar{Y})$ هو المسافة الراسية بين النقطة المقدرة $\hat{Y}i$ على خط الإنحدار والخط الأفقى الممثل للوسط الحسابى $\bar{Y}$ للمتغير التابع، وهذه القيمة تتأثر تأثرا كبيرا بمعامل الإنحدار، أو بمعنى آخر لوجود الرابطة بين المتغيرين موضع الدراسة. والإنحراف $(Yi-\hat{Y})$ عبارة عن المسافة الرأسية بين النقطة

Yi، Xi والنقطة المقدرة $\hat{Y}i$ والواقعة على خط الإنحدار ولذلك فإن مجموع مربعات البواقى $\sum e_i^2$ أو RSS يقيس تشتت النقط المختلفة حول خط **الإنحدار، وهذا التشتت يرجع إلى عوامل الصدفة البحتة، وتصبح قيمة مجموع مربعات الخطأ صفر إذا انطبقت النقط الأصلية (المشاهدة) على النقط التقديرية تماماً.**

وتسمى النسبة بين مجموع مربعات الإنحدار إلى مجموع التغير الكلى فى Y بمعامل التحديد ويرمز له بالرمز R^2 (مربع معامل الإرتباط بين X, Y فى حالة نموذج الإنحدار الخطى البسيط)، ولذلك إذا كان التغير المشروح أو المفسر يساوى صفر فإن مجموع التغير يصبح غير مفسر أو مشروح ويصبح معامل التحديد مساويا للصفر. أما إذا كان التغير غير المفسر يساوى صفراً فإن مجموع التغير الكلى يصبح كله مفسرا ويكون معامل التحديد واحد صحيح. وفى الحالات الأخرى يكون معامل التحديد بين الصفر والواحد الصحيح. وعلى ذلك يمكن كتابة معامل التحديد كما يلى:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\text{مجموع مربعات الإنحدار}}{\text{مجموع المربعات الكلى}} \quad \ldots.(61\text{-}3)$$

ولذلك فإن معامل التحديد R2 يوضح نسبة التغير فى المتغير التابع التى يمكن شرحها او تفسيرها بواسطة المتغير المستقل، وعلى ذلك فهو يعتبر مقياساً للقوة التفسيرية فى النموذج، ومن الطبيعى كلما كانت قيمة معامل التحديد قريبة من الواحد الصحيح كانت ثقتنا فى التقدير كبيرة، شرط ألا يكون ذلك ناتج عن بعض مشاكل القياس التى يعانى منها النموذج.

5/3ـ اختبار معنوية العلاقة الخطية للانحدار:

يمكن الاستفادة من تقسيم مجموع المربعات الكلى إلى مجموع مربعات الإنحدار ومجموع مربعات البواقى، فى اختبار معنوية العلاقة الخطية للانحدار بين المتغيرين X, Y . من خلال تكوين ما يعــرف بجــدول تحليــل التبــاين Analysis of Variance [ANOVA].

جدول تحليل التباين

ANOVA

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط مجموع المربعات	F_c
الإنحدار المتغير (X)	1	ESS	$\frac{ESS}{1}$	$\frac{ESS/1}{RSS/n-2}$
البواقـــــى	n-2	RSS	$\frac{RSS}{n-2}$	
الكلـــــى	n-1	TSS		

ويتم صياغة فرض العدم والفرض البديل كما يلى:-

فرض العدم $H0 : \beta=0$

الإنحدار غير معنوى

الفرض البديل $H0 : \beta\neq0$

وبإستخدام الاختبار Fc يمكن قبول أو رفض فرض العدم. من خــلال مقارنة Fc المحسوبة (كما فى جدول تحليل التباين) بقيمة F المستخرجة مــن جدول توزيع F كما يلى:

إذا كانت:

$$F(1, n-2, \varepsilon) \leq Fc$$

نرفض الفرض العدم، ونقبل الفرض البديل أى معنوية العلاقة.

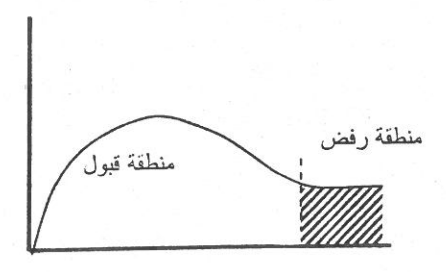
أما إذا كانت

$$F(1, n\text{-}2, \varepsilon) > Fc$$

نقبل فرض العدم أى أن الإنحدار غير معنوى وتظهر الرفض والقبول كما فى الشكل رقم (3-8).

شكل رقم (3-8)

منطقة قبول ورفض



$F(1,n\text{-}2, \varepsilon)$

ويمكن إعادة كتابة اختيار F_c بدلالة معامل التحديد R^2 كما يلى:-

$$TSS = RSS + ESS$$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS}$$

$$ESS = R^2 \,.\, TSS$$

$$RSS = (1 - R^2)\, TSS$$

وبالتعويض عن ESS ، RSS وفقا لصيغة Fc كما فى جدول تحليل التباين:
حيث أن:

$$F_c = \frac{ESS/1}{TSS/n-2}$$

$$F_c = \frac{ESS/1}{TSS/n-2}$$

$\therefore$

$$Fc = \frac{ESS}{RSS} \quad .(n-2)$$

$$Fc = \frac{R^2 ESS}{(1-R^2)\ TSS} \quad .(n-2)$$

$$Fc = \frac{R^2}{1-R^2} \ .(n-2) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (62\text{-}3)$$

6/3ـ ملاحظات على أهمية الاختبارات الإحصائية لمعلمات النموذج

عرفنا من الجزء السابق أن أهم المعايير الإحصائية استخداماً للحكم على جودة توفيق خط الإنحدار، معيار معامل التحديد، والمعيار الخاص بالأخطاء المعيارية للتقديرات. وليس هناك اتفاق عام بين الإقتصاديين القياسيين فى تقرير أى المعيارين الإحصائيين أكثر أهمية: معامل التحديد المرتفع أم الخطأ المعيارى للتقدير المنخفض. ولا توجد مشكلة بطبيعة الحال إذا أشارت النتائج إلى معامل تحديد مرتفع وأخطاء معيارية منخفضة. لكن هذه ليست الحالة الغالبة. ففى كثير من التطبيقات نحصل على معامل تحديد مرتفع بينما ترتفع الأخطاء المعيارية لبعض المعلمات. ويميل بعض الإقتصاديين القياسيين إلى أعطاء أهمية كبيرة لمعامل التحديد، وقبول تقديرات المعالم

بالرغم من عدم تحقيق بعضها معنوية إحصائية. ويقترح البعض الآخر أن قبول أو رفض التقديرات التى تثبت عدم معنويتها يجب أن يعتمد على الهدف من النموذج.

وترى الأغلبية أن معامل التحديد يكون له أهمية إذا استخدم النموذج فى التنبؤ بالقيم المستقبلية للظاهرة تحت الدراسة، على أن تنال الأخطاء المعيارية أهمية أكبر إذا كان الهدف من الدراسة هو تحليل الظاهرة الإقتصادية، بمعنى تحديد أى المتغيرات التفسيرية معنوى وأيهما غير معنوى، إلى جانب الحصول على تقديرات دقيقة للمعالم.

وتجدر الإشارة إلى أن معامل التحديد المرتفع له ميزته إذا كان مصحوباً بأخطاء معيارية منخفضة للتقديرات، أما إذا لم يتوافر المعامل المرتفع والأخطاء المعيارية المنخفضة كان لزاما على الباحث أن يكون حريصا فى تفسيره وتحليله وقبول النتائج. ولا شك أن الأولوية يجب أن تعطى أولا للمعايير الإقتصادية من حيث قيم وإشارات المعالم، فبعد استيفائها تبدأ مرحلة الاختيارات الإحصائية.

7/3 حالة عملية

Yi	4.6	3.6	4.6	6.6	7.6	5.6	5.6	8.6	8.6	9.6
Xi	5	4	6	8	8	7	6	9	10	12

حيث تشير:

Yi إلى الإستهلاك

Xi الدخل

المطلوب:

1- تقدير دالة الإستهلاك.

2- اختيار معنوية معالم دالة الإستهلاك بمستوى معنوية 5%

3- تكوين فترات الثقة للمعالم.

4- إيجاد معامل التحديد وتفسيره.

5- إيجاد معامل الإرتباط بين الدخل والإستهلاك.

6- اختبار معنوية العلاقة الخطية للإنحدار بإستخدام اختبار F وتكوين جدول تحليل التباين.

الحل:

يمكن الإجابة على هذه المطالب من خلال تكوين الجدول رقم (3-1).

جدول رقم (3-1)

OBS	Consumption Yi	Income Xi	$(Yi-\bar{Y})$	$(Xi-\bar{X})$	$(Yi-\bar{Y})(Xi-\bar{X})$	$(Xi-\bar{X})^2$	Y`1	Ei
1	4.6	5	- 1.9	- 2.5	4.75	6.25	4.47619	0.123810
2	3.6	4	- 2.9	- 3.5	10.15	12.25	3.66667	-0.06667
3	4.6	6	- 1.9	- 1.5	2.85	0.25	5.285714	-0.685714
4	6.6	8	0.1	0.5	0.05	0.25	6.904762	-0.309762
5	7.6	8	1.1	0.5	0.55	0.25	6.90762	0.695238
6	5.6	7	- 0.9	- 0.5	0.45	0.25	6.095238	-0.495238
7	5.6	6	- 0.9	-1.5	1.35	2.25	5.285714	0.314286
8	8.6	9	2.1	1.5	3.15	2.25	7.714286	0.885714
9	8.6	10	2.1	2.5	5.25	6.25	8.523810	0.076190
10	9.8	12	3.1	4.5	13.95	20.25	10.142857	-0.54285
Sum	65	75	0	0	42.5	52.5	65	0
Mean $\bar{X}$= 7.5							6.5	

1- معادلة الإنحدار كما تنص عليها النظرية الإقتصادية:

$$Yi=F(Xi) + ui$$

$$Yi= \alpha + \beta Xi + ui$$

وتقدير معلمات النموذج فإن:

$$\beta` = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Yi-\bar{Y})(Xi-\bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(Xi-\bar{X})^2}$$

$$\beta` = \frac{42.5}{52.5} = 0.80$$

$$\alpha` = \bar{Y} - \beta` \bar{X}$$

$$\alpha` = \bar{6}.5 - 0.80 * 7.5 = 0.5$$

معنى ذلك أن دالة الإستهلاك المقدرة وفقا لبيانات العينة الموجودة في الجدول هى

$$\hat{Yi} = 0.5 + 0.8\ Xi$$

وهذه الدالة المقدرة تتوافق مع توقعات النظرية الإقتصادية لها حيث أن:
$\beta`$ والتى تعبر عن الميل الحدى للإستهلاك، موجبة وأقل من الواحد كما تنص النظرية الإقتصادية أيضا.
$\alpha`$ الحد الأدنى للإستهلاك حتى لو كان Xi صفر، موجب كما تنص النظرية الإقتصادية أيضا.

2- اختبار معنوية معالم دالة الإستهلاك المقدرة.

ولإجراء اختبارات معنوية معالم دالة الإستهلاك يجب الحصول على الآتى:

$\sigma`^2$

S.e ($\alpha`$), Var ($\alpha`$)

S.e ($\beta`$), Var ($\beta`$)

COV ($\alpha`$, $\beta`$)

أ- تباين البواقى هو تقدير غير متحيز لتباين الخطأ العشوائى ونحصل عليه من القانون الآتى:

$$\sigma^{`2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} = \frac{2.494927}{10-2} = 0.3118$$

ب- تباين $\alpha`$ وخطؤها المعيارى

$$Var(\alpha`) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2} . \sigma^{`2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 615$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 52.5$$

n=10

$\sigma^{`2} = 0.3118$

$$Var(\alpha`) = \frac{615}{10 * 52.5} * 0.3118 = 0.36525$$

$$S.e(\alpha`) = \sqrt{Var(\alpha`)} = \sqrt{0.365} = 0.6043603$$

جـ- تباين $\beta`$ وخطؤها المعيارى

$$Var(\beta`) = \sigma^{`2} / \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$Var(\beta`) = \frac{0.3118}{52.5} = 0.0059$$

$$S.e(\beta`) = \sqrt{Var(\beta`)} = \sqrt{0.0059} = 0.0768$$

د- التغاير $Cov(\alpha`_1\beta`)$

أولا: المعلمة $\hat{\alpha}$

$$COV(\alpha`,\beta`) = -\frac{\bar{X}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.\sigma`^2$$

$$COV(\alpha`,\beta`) = -\frac{7.5}{52.5} * 0.3118$$

$$= - 0.0445$$

بعد الحصول على القيم كما فى النقاط أ، ب، ج، د يمكن عمل اختبار t لكل من `α، `β كما يلى:

$$t^* = \frac{\alpha` - \alpha}{S.e(\alpha`)}$$

وبالتعويض فى هذه الصيغة نحصل على t المحسوبة.

$$t^* = \frac{0.5 - 0}{0.604} = 0.827$$

بعد الحصول على *t المحسوبة نقارنها بـــ t الجدولية بدرجات حرية "n-2" ثم نقرر قبول الفرض العدم أو رفضه.

ثانيا: المعلمة $\hat{\beta}$

$$t^* = \frac{\beta` - \beta}{S.e(\beta`)}$$

وبالتعويض فى هذه الصيغة *t

$$t^* = \frac{0.8 - 0}{0.0768} = 10.41666$$

ثم نقارن بين t^* المحسوبة، t الجدولية بمستوى معنوية محدد وعلى أساسها نقبل الفرض العدم أو الفرض البديل.

3ـ تكوين فترات الثقة لمعلمات $\alpha^`, \beta^`$.

بفرض أن مستوى المعنوية 95% يمكن تكوين فترات الثقة لكل من $\alpha^` , \beta$ كما يلى:

أـ فترة الثقة للمعلمة α هى:

$$\alpha \pm T_{3/2}. S.e(\alpha^`)$$

$$0.5 \pm (2.306)(0.604)$$

$$0.5 \pm 1.392$$

$$1.892824 > \alpha > - 0.892824$$

أى أن α تقع فى المدى المحدد السابق بدرجة ثقة 95%. ونلاحظ اتساع فترة الثقة للملمة α نوعا ما. ويلاحظ أيضا أن α يمكن أن تساوى الصفر بالتالى قد لا تكون معنوية.

بـ فترة الثقة للمعلمة β هى:

$$\beta \pm T_{3/2}. S.e(\beta\alpha^`)$$

$$0.8 \pm (2.306)(0.0768)$$

أى أن β تقع فى المدى

$$0.9771008 > \beta > 0.6228992$$

بدرجة ثقة 95%. ونلاحظ أن β تختلف معنويا عن الصفر، مما يوضح أن β معنوية.

3ـ معامل التحديد R^2:

يمكن حساب معامل التحديد من الصيغة رقم (3-61) كما يلى:

$$R^2 = \frac{ESS}{RSS}$$

أو يمكن حسابه من معامل الإرتباط كما يلى:

$$R = \frac{\sum_{n-1}^{n}(Y-\bar{Y})(X-\bar{X})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y-\bar{Y})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X-\bar{X})^2}}$$

$$R = \frac{42.5}{\sqrt{36.9}\sqrt{52.5}} = \frac{42.5}{6.0745*7.245} = \frac{}{44.013}$$

$R= 0.96$

وهو ارتباط طردى قوى. ومنه يمكن الحصول على معامل التحديد R^2 والذى يساوى 0.93، وهذا يعنى أن 93% من التغيرات التى تحدث فى Yi (الإستهلاك) كمتغير تابع ترجع إلى التغيرات فى المتغير Xi (المستقل أو المفسر) الدخل، 7% ترجع إلى التغيرات العشوائية، وبالتالى نكون حصلنا على المطلوب رقم 5 فى الحالة العملية.

6ـ جدول تحليل التباين:

يمكن تكوين جدول تحليل التباين كما يلى:

جدول تحليل التباين ANOVA

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط مجموع المربعات	F_c
الإنحدار المتغير (X)	1	ESS 34.408	ESS 34.408	* / **
البواقـــــى	8	RSS 2.492	**RSS/8 0.3115	Fc= 34.408 / 0.3115 = 110.45
الكلـــــى	9	TSS 36.9		

هذا ويمكن الحصول على F المحسوبة عن طريق معامل التحديد

$$Fc = \frac{R^2}{1-R^2} * n-2$$

$$Fc = \frac{0.93}{1-0.93} * 8 = 106.2$$

تقريبا نفس القيمة، ثم نقارن Fc المحسوبة مع F الجدوليــة ونقبــل الفرض العدم أو الفرض البديل.

الفصل الرابع
نموذج الانحدار الخطى المتعدد

يعتبر نموذج الإنحدار الخطى المتعدد أو ما يعرف بـالنموذج العـام، الإمتداد الطبيعى والمنطقى للنموذج الخطى لمتغيرين (Y, X) حيـث يعـالج الوضع الناشئ عند استخدام K-1 متغير مستقل X2, X3, ……Xk لتفسير التغيرات فى المتغير التابع Y فى معادلة إنحدار واحدة. وتتشابه المفاهيم فـى هذه الحالة مع تلك المستعملة فى حالة الإنحدار الخطى البسيط (Y, X)، لذلك سوف يناقش هذا الفصل، صياغة نموذج خطى عام، طريقة التقدير الإحصائى وخصائصها الحسابية والإحصـائية، والإختبـارات الإحصـائية لتقـديرات المربعات الصغرى، ثم قياس القدرة التفسيرية للنموذج. ولكن نظـراً لتعـدد المتغيرات المستقلة فإننا نستعمل طرق جبر المصفوفات، وتتسم هذه الطـرق بالعمومية والمرونة، حيث يمكن تطبيقها على حالات المتغيرين، والمتغيـرات الثلاثة، أو أى عدد من المتغيرات شريطة ألا يفوق عـدد المتغيـرات عـدد المشاهدات المستخدمة للتقدير.

1/4 ـ صياغة النموذج الخطى العام General Linear Model

يمكن صياغة النموذج الخطى العام، من خلال معادلة الإنحدار التالية:-

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{i3} + \ldots\ldots \beta_k X_{ki} + u_i \ldots\ldots\ldots\ldots (1-4)$$

حيث أن:-

1- Y_i المتغير التابع.

2- X_{ki}، ………، X3، X2 المتغيرات المستقلة.

3- K-1 عدد المتغير المستقلة.

4- $i=1,2,\ldots\ldots n$ عدد المشاهدات

5- $\beta 1, \beta 2, \ldots\ldots\ldots\ldots \beta_k$ معلمات دالة الإنحدار.

6- u_i المتغير العشوائى.

وتعتبر المعادلة رقم (4-1) واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها n، كما فى نظام المعادلات الآتية:-

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \dots\dots\dots + \beta_k X_{k1} + u_1 \\
Y_2 &= \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \dots\dots\dots + \beta_k X_{k2} + u_2 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad\quad \cdot \quad \cdot \\
Y_n &= \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \dots\dots\dots + \beta_k X_{kn} + u_n
\end{aligned}
$$

ويمكن تمثيل هذه المعادلات فى الشكل التالى بإستعمال المصفوفات كما يلى:

$$
\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ \dots \\ Yn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X21 & X31 & \dots\dots\dots Xn1 \\ 1 & X22 & X32 & \dots\dots\dots Xk2 \\ .. & \dots & \dots & \dots\dots \\ . & \dots & \dots & \dots\dots \\ 1 & X2N & X3n & XKN \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta 1 \\ \beta 2 \\ \dots \\ \dots \\ \beta n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu 1 \\ \mu 2 \\ \dots \\ \dots \\ \mu n \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2-4)
$$

والصيغة رقم (4-2) يمكن اختصارها كما يلى:

$$Y = X\beta + \mu \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(3\text{-}4)$$

حيث أن:

1- Y متجه عمودى من درجة nx1، n عدد المشاهدات للمتغير التابع Y.

2- X مصفوفة من الدرجة nx k تحتوى مشاهدات المتغيـرات المسـتقلة X2, X3, . Xkوعمودها الأول يحتوى على قيم الواحد الصحيح.

3- 3- β متجه عمودى من درجة kx1 يحتوى على المعـالم المجهولـة β1, β2, β3, ……….βK.

4- μ متجه عمودى من درجة nx1 يحتوى على قيم المتغير العشوائى μi المجهولة.

وعلى اعتبار أن العلاقة (4-3) هى العلاقة الحقيقية فإنها مجهولة، ويراد تقدير معالمها بإستخدام الإحصـاءات المتوافرة حول المتغير التابع Y والمتغيرات المستقلة $X_2, X_3, \ldots\ldots, X_K$. ويمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى فى حالة النموذج العام، كما فى حالة الإنحدار الخطى البسيط، وتحت نفس الفروض كما يلى:-

1- القيمة المتوقعة (الوسط الحسابى) لمتجه المتغير العشوائى تساوى قيمة الصفر، أى أن:-

$$E(\mu)=0$$

حيث أن 0 متجه الصفر من درجة nx1. ويعنى هذا الفرض أن القيمة المتوقعة لكل عنصر من عناصر المتجه العشوائى μi تساوى الصفر، أى

$$E(\mu)=E\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \ldots\\ \ldots\\ \mu m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E(\mu_1)\\ E(\mu_2)\\ \ldots\\ \ldots\\ E(\mu m)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \ldots\\ \ldots\\ 0\end{bmatrix}=0$$

2- تماثل التباين واستقلال المتغيرات المستقلة:

وهذا يعنى ثبات تباين المتغير العشوائى، والتغاير بين المتغيرات المستقلة صفر، أى انعدام الإرتباط الذاتى.

$$COV(\mu)=E(\mu\mu_1)=\sigma^2/n$$

حيث `μ تدوير المتجه μ، 1n مصفوفة الوحدة من الدرجة nxn. أى أن:

$$COV(\mu)=E(\mu\mu`)$$

$$= E\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \dots \\ \mu m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_n \end{bmatrix}$$

$$= E\begin{bmatrix} \mu_1^2 & \mu_1\mu_1 & \dots\dots\dots\mu_1\mu_n \\ \mu_2\mu_1 & \mu_2^2 & \dots\dots\dots\mu_2\mu n \\ . & . & . \\ & . & . \\ \mu n\mu_1 & \mu n\mu_2\dots\dots\dots & Un^2 \end{bmatrix}$$

$$= E\begin{bmatrix} E(\mu_1^2) & E(\mu_1\mu_2) & \dots\dots\dots E(1\mu_n) \\ \mu_2\mu_1 & E(\mu_2^2) & \dots\dots\dots E(\mu_2\mu n) \\ . & . & . \\ & . & . \\ E(\mu n\mu_1) & E(\mu n\mu_2)\dots\dots\dots & E(Un^2) \end{bmatrix}$$

$$= E\begin{bmatrix} Var(\mu_1) & COV(\mu_1\mu_2) & \dots\dots\dots COV(1\mu_n) \\ Cov(\mu_2\mu_1) & Var(\mu_2) & \dots\dots\dots COV(\mu_2\mu n) \\ . & . & . \\ & . & . \\ COV(\mu n\mu_1) & COV(\mu n\mu_2)\dots\dots\dots & Var(Un) \end{bmatrix}$$

وباستخدام فرض ثبات التباين وانعدام الإرتباط الذاتى:

$$Var(\mu i) \equiv E(\mu_i^2) = \sigma^2$$

$$COV(\mu i\mu i) \equiv COV(\mu i\mu i) = 0,\ i \neq j$$

فإنه يمكننا كتابة المصفوفة السابقة على النحو التالى:-

$$= E(\mu\mu^1) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & \sigma^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ . & . & . \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ . & . & . \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 I_n$$

وتسمى المصفوفة السابقة بمصفوفة التباين والتغاير للمتغير العشوائى μ، حيث تشكل عناصر القطر الرئيسى فى المصفوفة تباين قيم μ، بينما العناصر الأخرى تشكل التغاير والذى يساوى الصفر.

3-مصفوفة البيانات X فى الصيغة رقم (4-3) مصفوفة غير عشوائية، أى أنها تحتوى قيما ثابتة فى المعاينات المتكررة.

4-المتجه μ لها توزيعا طبيعيا متعدد المتغيرات بمتجه وسط صغرى، ومصفوفة تباين وتغاير عددية هى $\sigma^2 I_n$: أى أن

$$\mu \sim N(0, \sigma^2 I_n)$$

هذا ويمكن وضع النموذج الخطى العام فى الصيغة التالية:

$$\left.\begin{aligned} & Y = X\beta + \mu \\ & E(\mu) = 0 \\ & E(\mu\mu') = \sigma^2 I_n \\ & \mu - N(0, \sigma^2 I_n) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}4)$$

2/4ـ طريقة التقدير الإحصائى وخصائصها:

تعتبر أفضل الطرق الإحصائية، لتقدير خط الإنحدار، هـى طريقـة المربعات الصغرى، كما سبق الإشارة إلى ذلك أثناء دراسة الإنحدار البسيط، لذلك سوف نقدم هذه الطريقة فى هذا الجزء، ولكن مع نموذج الإنحدار العام.

1/2/4ـ طريقة المربعات الصغرى

يمكن الحصول على تقديرات المربعات الصغرى لمعلمات المجتمـع المجهولة من خلال نموذج الإنحدار العام – بإستخدام جبر المصفوفات – كما يلى:

$$\left.\begin{array}{l} Y = \hat{Y} + e \\ Y = X\hat{\beta} + e \end{array}\right\} \qquad (5\text{-}4)$$

حيث أن:-

$\hat{Y}$:متجه عمودى من درجة $nx1$ يحتوى على القيم المقدرة للمتغير التابع Y.

$\hat{\beta}$: متجه عمودى من درجة $Kx1$ يحتوى على مقدرات المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3 \ldots\ldots, \hat{\beta}_k$.

e: متجه عمودى من درجة $nx1$ يحتوى على البواقى.

ونحصل على تقديرات المربعات الصغرى العادية باختيار قيم $\hat{\beta}$ التى تدنى مجموع البواقى إلى أدنى قيمة له. أى يجب تدنية $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$

حيث أن:

$$e`e = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_n \end{bmatrix}$$

$$= e_1^2 + e_2^2 + \ldots\ldots\ldots e_n^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

وبناء على ذلك تصبح النهاية الصغرى:

$$\min_{\beta_1 \ldots \beta_k} \sum e_i^2 = \min_{\beta} e`e$$

بما أن:

$$Y = X\hat{\beta} + e$$
$$E = Y - X\hat{\beta}$$

وبالتالى فإن:

$$e`e = (Y - X\hat{\beta})`(Y - X\hat{\beta})$$
$$= (Y` - \beta`\hat{X}`)(Y - X\hat{\beta})$$
$$e`e = Y`Y - \hat{\beta}`X`Y - Y`X\hat{\beta} + \hat{\beta}`X`X\hat{\beta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7\text{-}4)$$

وبملاحظة $X`Y$ $\hat{\beta}`$ تساوى $Y` X\hat{\beta}$ يمكن كتابة الصيغة رقم (7-4) كما يلى:

$$e`e = Y`Y - 2\hat{\beta}`X`Y - \hat{\beta}`X`X\hat{\beta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7\text{-}4)1$$

وتفاضل الصيغة رقم 1(7-4) بالنسبة لـــ $\hat{\beta}$ كما يلى:

$$\frac{\partial(e`e)}{\partial\hat{\beta}} = -2X`Y + 2X`X\beta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (8\text{-}4)$$

نحصل على المعادلة الطبيعية فى شكل مصفوفات.

$$X`X\hat{\beta} = X`Y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9\text{-}4)$$

وللحصول على قيم $\hat{\beta}$ نضرب جانبى المعادلة بالمعكوس $(X`X)^{-1}$

$$(X`X)^{-1} X`X\beta = (X`X)^{-1} X^{1}Y$$
$$\beta = (X`X)^{-1} X`Y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10\text{-}4)$$

وتعتبر المعادلة رقم (4-10) هى المعادلة الأساسية لمعلمات النموذج بطريقة المربعات الصغرى، فى حالة النموذج الخطى العام.

وهناك مجموعة من الخصائص بطريقة المربعات الصغرى، تجعلها جيدة فى التقدير أو كما ذكر جاوز ماركوف أحسن تقدير خطى غير متحيز، يمكن عرضها من خلال نموذج الإنحدار العام.

2/2/4 – الخصائص الحسابية لتقديرات المربعات الصغرى

أمكن الحصول على معلمات النموذج بطريقة المربعات الصغرى فى حالة الإنحدار العام كما فى المعادلة رقم (4-10)

$$\hat{\beta} = (X`X)^{-1} X`Y$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة كما يلى:-

$$\hat{\beta} = (X`X)^{-1} X'(X\beta+\mu)$$
$$\hat{\beta} = (X`X)^{-1} X`X\beta + (X`X)^{-1}X`\mu$$
$$\therefore \ \hat{\beta} = \beta + (X`X)^{-1} X`\mu$$

ويلاحظ أن:

1- y تم التعويض عنها فى الخطوة الثانية بقيمتها $\mu + X\beta=$

2- $(X'X)^{-1}X`X$ عبارة عن مصفوفة الوحدة أى قيمتها بواحد صحيح.

وهذا على اعتبار أن البواقى – من التعريف – عبارة عن

$$e = Y - X\hat{\beta}$$

وبالتعويض عن $\hat{\beta}$ تصبح:

$$e = Y - X(X`X)^{-1} X`Y$$

وبأخذ المنحة Y عامل مشترك

$$e = \{1- X(X`X)^{-1}X`\}Y$$
$$e = MY \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12-4)$$

حيث أن M

$$M = I - X(X`X)^{-1} X`$$

ولها الخواص التالية:

$$MM` = MM = M^2 = M, M = M`$$

لأن MX=0 ويمكن استنتاج الخواص التالية:

1- $E(e)=0$

حيث أن:

$$E(e) = E(M\mu) = ME(\mu)=0$$

أى أن متوسط البواقى يساوى الصفر

2- $X_e^{\backslash} = 0$

معنى ذلك استقلال البواقى عن المتغيرات المستقلة، حيث أن:

$$X_e^{\backslash} = X^{\backslash}1 (Y- X \hat{\beta}) = X^{\backslash}Y - X^{\backslash}X \hat{\beta}=0$$

من المعادلة الطبيعية

$$X`X\hat{\beta} = X`Y$$

3- $\hat{Y}_e = 0$

أى أن البواقى مستقلة عن القيم المقدرة للمتغير التابع، حيث أن

$$\hat{Y} e= (X\hat{\beta})_e^{\backslash} = \hat{\beta} x_e^{\backslash} =0$$

لأن $X_e^{\backslash} = 0$ وفقا للخاصية الثانية، وبشكل عام فإن هذه الخواص ما هى إلا الإمتداد الطبيعى للخواص الحسابية فى حالة الإنحدار البسيط.

3/2/4ـ الخواص الإحصائية لتقديرات المربعات الصغرى

تحمل تقديرات المربعات الصغرى المتحصل عليها من النموذج الخطى العام نفس الخصائص الإحصائية لنموذج الإنحدار الخطى البسيط، أى أنها تتميز بالخطية، عدم التحيز، الكفاية، وسوف نناقش ذلك كما يلى:

1ـ الخطية:

يمكن معرفة ما إذا النموذج خطى من خلال الصيغة (4-10) والتى تعرض المعلمات المقدرة

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

وبفرض أن: $K = (X'X)^{-1}X'Y$

حيث K مصفوفة من الدرجة KXn تحتوى على ثوابت

$$\hat{\beta} = KY \qquad (13\text{-}4)$$

ومن ثم فإن متجه التقديرات $\hat{\beta}$ تعتمد بصورة خطية على متجه المتغير التابع Y.

1ـ عدم التحيز

تعتمد التقديرات $\hat{\beta}$ لمعلمات النموذج بطريقة المربعات الصغرى، بصفة عدم التحيز، وهذا يعنى أن القيمة المتوسطة (الوسط) لكل معلمة فى المتجه تساوى قيمتها الحقيقة β.

أى أن:

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

ويمكن إثبات ذلك كما يلى:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$
$$Y = X\beta + \mu$$

وبالتعويض عن y فى $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta} = (X`X)^{-1} X` (X\beta + \mu)$$

$$\hat{\beta} = (X`X)^{-1} X`X \beta + (X`X)^{-1} X` \mu$$

حيث أن

$$(X`X)^{-1} X`X = I$$

$$E(\mu) = 0$$

$$\therefore E(\hat{\beta}) = \beta + (X`X)^{-1} X`E(\mu)$$

$$\therefore E(\hat{\beta}) = \beta$$

وتوضح هذه النتيجة أن وسط $\hat{\beta}$ هو β. ومن ثم تكون $\hat{\beta}$ تقدير غير متحيز لمعلمات المجتمع الحقيقية β. هذا ويمكن الحصول على تباين وتغـــاير $\hat{\beta}$ كما يلى:

نأخذ مصفوفة التباين والتغاير لـــ $\hat{\beta}`$ الشكل التالى:

$$COV(\hat{\beta}) = E\{\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))`\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14\text{-}4)$$

$$COV(\hat{\beta}) = E\{\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)`\}$$

$$COV(\hat{\beta}`) = E\left[\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 - \beta_1 \\ \hat{\beta}_2 - \beta_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_K - \beta_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 - \beta_1 & \hat{\beta}_2 - \beta_2 & \hat{\beta}_K - \beta_K \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 & E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_2 - \beta_2) & E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta} - \beta_K) \\ E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 & E(\hat{\beta}_2 - \beta_2) & E(\hat{\beta}_2 - \beta_2)(\hat{\beta}_K - \beta_K) \\ & & \\ E(\hat{\beta}_k - \beta_k)(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 & E(\hat{\beta}_K - \beta_K)(\hat{\beta}_k - \beta_K) & E(\hat{\beta}_K - \hat{\beta}_K)^2 \end{bmatrix}$$

$$COV(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_1) & COV(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & COV(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_K) \\ COV(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) & COV(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_K) \\ & & \\ COV(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_1) & COV(\hat{\beta}`_K - \hat{\beta}_2) & Var(\hat{\beta}_K) \end{bmatrix}$$

$$COV(\hat{\beta}) = \sigma^2 \mu \begin{bmatrix} (X'X)^{-1}_{11} & (X'X)^{-1}_{12} & (X X)^{-1}_{1k} \\ X'X)^{-1}_{21} & (X'X)^{-1}_{22} & (X X)^{-1}_{2k} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ X'X)^{-1}_{k1} & (X'X)^{-1}_{k2} & (X X)^{-1}_{kk} \end{bmatrix}$$

حيث يقع تباين التقديرات $\hat{\beta}$ على القطر الرئيسى للمصفوفة، ويقع تغاير التقديرات $\beta`$ خارج القطر الرئيسى لها.

ويمكن برهان مصفوفة التباين والتغاير كما يلى:

$$COV(\hat{\beta}) = E\{(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\}$$

حيث أن:

$$\hat{\beta} = \beta + (X`X)^{-1}X`\mu$$

$$(\hat{\beta} - \beta) = (X`X)^{-1} X`\mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16\text{-}4)$$

وبالتعويض بالصيغة رقم (16-4) فى الصيغة رقم (15-4) فإن:-

$$COV(\hat{\beta}) = E\{(X`X)^{-1}X`\mu)(X`X)^{-1}X`\mu)`\}$$

$$COV(\hat{\beta}) = E\{(X`X)^{-1}X`\mu\mu`X(X`X)^{-1})`\}$$

$$COV(\hat{\beta}) = (X`X)^{-1}X`E(\mu\mu`)X(X`X)^{-1}$$

$$COV(\hat{\beta}) = (X`X)^{-1}X`\sigma^2 In.\ X\,(X`X)^{-1}$$

$$COV(\beta`) = \sigma^2(X`X)^{-1}X`(X`X)^{-1}$$

$$COV(\beta`) = \sigma^2(X`X)^{-1} \quad (17\text{-}4)$$

ويلاحظ أن:-

$(X`X)^{-1}X`X = I_k.$ مصفوفة الوحدة

$E(\mu\mu`) = \sigma^2 In$

In مصفوفة الوحدة أيضا، ويمكن تجاهل هذه المصفوفة.

3ـ الكفاية

خاصية الكفاية تعنى أن تقدير المربعات الصغرى، له أقل تباين ممكن بالمقارنة بتقديرات أخرى أيضا تكون خطية وغير متحيزة، وهذا ما تحاول نظرية جاوس ماركوف إثباته، حيث تنص النظرية -كما سبق الإشارة إلى ذلك- أن تقديرات المربعات الصغرى، هى أفضل تقدير غير متحيز "Blue" "Best " Linear unbiased"، ولبرهان النظرية – نظرية جاوس ماركوف – نفترض تقدير آخر ثم نقارن بين هذا التقدير وتقديرات المربعات الصغرى كما يلى:-

بفرض التقدير $\hat{\hat{\beta}}$ لمعلمات المجتمع β كما يلى:

$$\hat{\hat{\beta}} = \{(X`X)^{-1}X`+D\}\ Y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18\text{-}4)$$

حيث أن D مصفوفة من درجة kxn تحتوى على ثوابت (أوزان)

D=0

ويمكن تحديد عدم تحيز $\hat{\hat{\beta}}$ كما يلى:-

$$\hat{\hat{\beta}} = \{(X`X)^{-1}X`+D\}\ Y$$

$$\hat{\hat{\beta}} = \{(X`X)^{-1}X`+D\}\ (Y\beta+\mu)$$

$$\hat{\hat{\beta}} = \{(X`X)^{-1}X`X\beta + (X`X)^{-1}X`\mu + DX\beta + D\mu$$

$$E(\hat{\hat{\beta}}) = \beta + (X`X)^{-1}XE(\mu)+DX\beta + DE(\mu\ )$$

$$E(\mu) = 0$$

∴

$$E(\hat{\beta}) = \beta + DX\beta$$

وكذلك:

$$DX=0$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19\text{-}4)$$

وهذا يعنى أن تقديرات $\hat{\beta}$ هى تقديرات غير متحيزة للمعلمة β تحت شرط $DX=0$ ، ولتحديد تباين $\hat{\beta}$ نحصل على مصفوفة التبـــاين والتغـــاير للتقدير $\hat{\beta}$ ، كما يلى:

$$COV(\hat{\beta}) = E\{(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))'\} \quad (20\text{-}4)$$

$$COV(\hat{\beta}) = E\{(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'\} \quad (20\text{-}4)'$$

وعلى اعتبار أن:-

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1} X'\mu + D\mu$$

$$DX = 0 \quad \text{و}$$

بالتعويض فى الصيغة رقم $(20\text{-}4)'$

$$COV(\hat{\beta}) = E\{[(X'X)^{-1}X'\mu + D\mu][((X'X)^{-1}X'\mu + D\mu)]'\}$$

$$COV(\hat{\beta}) = E[(X'X)^{-1}X'\mu + D\mu][\mu'(X'X)^{-1} + \mu'D')] \}$$

$$COV(\hat{\hat{\beta}})=E[(X`X)^{-1}X`\mu\mu`X(X`X)^{-1}+(X`X)^{-1}X`D\mu\mu`D`+$$
$$D\mu\mu`X(X`X)^{-1} + D\mu\mu`D`\}$$

$$COV(\hat{\hat{\beta}})=\sigma^2(X`X)^{-1}X`X(X`X)^{-1}+\sigma^{-}(X`X)^{-1}X`D`$$
$$+ \sigma^2 DX(X`X)^{-1} + \sigma^2 DD`$$

وبإستعمال الشرط:

$$DX = 0 = X`D`$$

$$COV(\hat{\hat{\beta}})=\sigma^2(X`X)^{-1} + \sigma^2 DD` \qquad (21\text{-}4)$$

معنى ذلك من الصيغة رقم (4-17) نجد أن:-

$$COV(\hat{\hat{\beta}}) = COV(\hat{\beta}) + \sigma^2 DD`$$

أى أن:

$$COV(\hat{\beta}) = COV(\hat{\hat{\beta}}) - \sigma^2 DD`$$

وحيث أن DD^1 مصفوفة موجبة مؤكدة إذا $COV(\hat{\beta}`) < COV(\hat{\hat{\beta}}`)$ وبالتالى فإن تقديرات المربعات الصغرى تتسم بالكفاية، وأنها أحسن تقدير خطى غير متحيز. كما تنص نظرية جاوس ماركوف.

3/4ـ الإختبارات الإحصائية

سوف نناقش فى هذا الجزء من الفصل الرابع، اختبارات المعنوية لمعلمات النموذج، إنشاء فترات الثقة لها، جودة توفيق النموذج، القدرة التفسيرية للمتغيرات المستقلة.

1/3/4ـ اختبارات المعنوية لمعلمات $\hat{\beta}$

نستخدم تباين التقديرات $\hat{\beta}$ فى إجراء اختبارات المعنوية والفروض، حيث تباين المعلمات $\hat{\beta}$.

$$COV(\hat{\beta}) = \sigma^2(X`X)^{-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17\text{-}4)$$

غير أن التباين يحتوى على معلمة مجهولة القيمة σ^2 . ويمكن استخدام تقدير غير متحيز لها وهو تباين البواقى كما يلى:-

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22-4)$$

$\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ مجموع مربعات البواقى

n عدد المشاهدات

k عدد المتغيرات

وعلى اعتبار أن

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e`e$$

وبالتعويض فى المعادلة رقم (4-22) نحصل على الصيغة التالية:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{e`e}{n-k} = \frac{(Y - X\hat{\beta})(Y - X\hat{\beta})}{n-k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23-4)$$

على اعتبار أن

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$$

ويمكن استخدام صيغة أخرى لـ $\sigma^{\backprime 2}$ كما يلى:

$$e`e = Y`Y - 2\hat{\beta}`X`Y + \hat{\beta}`X`X\hat{\beta} \quad \text{......................(24-4)}$$

وعلى اعتبار أن المعادلة الطبيبعية

$$X`Y = X`X\hat{\beta}$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة رقم (4-23) كما يلى:

$$e`e = Y`Y - 2\hat{\beta}`X`Y + \hat{\beta}`X`Y$$

$$e`e = Y`Y - \hat{\beta}`X`Y$$

وبالتعويض فى المعادلة رقم (4-23) نحصل على:-

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Y`Y - \hat{\beta}`X`Y}{n-k} \quad \text{..............................(25-4)}$$

ويمكن استخدام صيغة رابعة:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Y`Y - \hat{\beta}`X`Y}{n-k} \quad \text{...(26-4)}$$

وبالتعويض عن $\hat{\beta}'$ فى البسط

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Y'Y - \hat{\beta}'X'Y}{n-k} = \frac{Y'Y - Y'X(X'X)^{-1}X'Y}{n-k}$$

وعليه فإن أيا من الصيغ التالية يقود إلى النتيجة نفسها:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n-k} = \frac{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})}{n-k}$$

$$= \frac{Y'Y - \hat{\beta}'X'Y}{n-k} = \frac{Y'Y - \beta'X'X\hat{\beta})}{n-k}$$

$$= \frac{Y'Y - Y'X(X'X)^{-1}X'Y}{n-k}$$

ولإجراء اختبارات المعنوية على المعلمات المقدرة، لابد من إضافة الفرض الخاص بالتوزيع الطبيعى لقيم μ:

$$\mu \sim N(0, \sigma^2 In)$$

وبناء على هذا الفرض وعلى اعتبار أن Y تعتمد على المتغير العشوائى، فإن قيمة Y موزعة حسب التوزيع الطبيعى:

$$Y \sim N(X\beta, \sigma^2 In)$$

على اعتبار أن وسط Y يمكن الحصول عليه كما يلى:

$$Y = X\beta + \mu$$

$$E(Y) = E(X\beta) + E(\mu)$$

$$E(Y) = X\beta + E(\mu)$$

$$E(Y) = X\beta$$

ويتباين Y يمكن الحصول عليه كما يلى:

$$COV (Y) = E(Y - X\beta) (Y- X\beta)`$$

$$= E(\mu\mu`)$$

$$= \sigma^2 In$$

كما أن قيمة التقديرات $\hat{\beta}$ لها توزيع طبيعى، على اعتبار أنها دالة فى متجه المتغير التابع لها Y العشوائى الطبيعى.

$$\hat{\beta} \sim N(\beta , \sigma^2(X` X)^{-1})$$

وهذا يعنى أن كل عنصر من j $\hat{\beta}$من عناصر متجه التقديرات $\hat{\beta}$ له التوزيع الطبيعى يوسط يساوى العنصر المقابل βj من متجه المعلمات الحقيقية β وتباين يساوى مضروب σ^2 بالعنصر المقابل على قطـر المصفوفـة $(X`X)^{-1}$ أى أن:-

$$\hat{\beta}_j \sim N(\beta_j , \sigma^2(X`X)^{-1}_{jj})$$

حيث أن $\sigma^2(X`X)^{-1}_{jj}$ هو العنصر رقم j فى قطر مصفوفة التبـــاين والتغاير الخاصة بـــ $\hat{\beta}$. وعلى اعتبار أن σ^2 مجهولة فإنه يجرى اســـتعمال تباين البواقى $\hat{\sigma}^2$ السابقة لنحصل على إحصائية t المعتادة.

$$t^* = \frac{\hat{\beta}_j - \beta`_j}{S.e(\hat{\beta} j)} \text{..} (27-4)$$

حيث أن:

$$S.e(\hat{\beta} j) = \sqrt{Var(\hat{\beta} j)}$$

$$S.e(\hat{\beta} j) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 (X` X)^{-1}_{jj}} = \hat{\sigma}^2 \sqrt{(X`X)^{-1}_{jj}}$$

وتستعمل هذه الإحصائية لإجراء اختبارات الفروض لكل معلمـــة βj على حدة، حيث يكون:

فرض العدم $H0 : \beta j = \beta_0 = 0$

الفرض البديل $H1 : \beta j \neq \beta_0 \neq 0$

ونقارن *t مع t الجدولية بدرجات حرية "n-k" ثم نقرر قبول الفرض العدم أو البديل. ويمكن استخدام الإحصاءات السابقة لإنشـــاء فتـــرات الثقـــة للمعلمات المقدرة $\hat{\beta}$.

2/3/4ـ إنشاء فترات الثقة:

من الصيغة رقم (4-27)، يمكن إنشاء فترة الثقة للمعلمات المقـــدرة بالمتجهة $\hat{\beta}$، كما يلى:-

$$t = \frac{\hat{\beta} j - \beta`0}{S.e(\hat{\beta} j)} = \frac{\hat{\beta} j - 0}{S.e(\hat{\beta} j)} = \frac{\hat{\beta} j}{S.e(\hat{\beta} j)}$$

$$t = \frac{\hat{\beta} j - \beta`0}{\hat{\sigma}^{2} \sqrt{(X`X)^{-1}_{jj}}} \sim tn - k$$

وعند مستوى معنوية معين c% نحصل على فترة الثقة للمعلمـــة βj كما يلى:

$$\hat{\beta}_{j} \pm t_{\varepsilon/2}\, S.e(\hat{\beta}_{j})$$

$$\hat{\beta} \pm t\varepsilon_{2}\, \hat{\sigma} = \sqrt{(X`X)^{-1}_{ii}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(28-4)$$

3/3/4ـ جودة التوفيق وجدول تحليل التباين "ANOVA"

تستخدم الإحصاء F لاختبار جودة توفيق النموذج الخطى العام وتعتمد F على المعادلة التالية والتى تحدد مصادر التباين الإجمالى ومجموع المربعات اللاحقة بها:

$$TSS = ESS + RSS$$

ويمكن تعريف مجاميع المربعات السابقة فى النموذج الخطى العام كما يلى:

1- مجموع المربعات الكلى TSS. يعرف بأنه مجموع مربعات انحرافات قيم المتغير التابع Y عن وسطه الحسابى $\bar{Y}$ أى أن:

$$TSS = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i}^{n} y_i^2 - n\bar{Y}^2$$

$$= Y'Y - n\,\bar{y}^2$$

2- مجموع مربعات الإنحدار ESS، يعرف بأنه مجموع مربعات انحرافات قيم $\hat{Y}$ ، وعلى اعتبار أن:

$$TSS = ESS + RSS$$

$$ESS = TSS - RSS$$

$$ESS = (Y'Y - n\bar{Y}^2) - (Y'Y - \hat{\beta}'X'Y)$$

$$ESS = Y`Y - n\bar{Y}^2 - Y`Y - \hat{\beta}`X`Y$$

$$ESS = \hat{\beta}`X`Y - n\bar{Y}^2$$

3- مجموع مربعات الإنحدار RSS. يعرف بأنه مجموع مربعات انحرافات قيم Y عن $\hat{Y}$

$$RSS = TSS - ESS$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e`e$$

هذا ويستخدم اختيار F فى اختيار فرض العدم والذى يعنى أن جميع معاملات الإنحدار فى العلاقة الحقيقية فى المجتمع تساوى صفر

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \beta_k = 0$$

كذلك الفرض البديل والذى يعنى بأن واحدة من هذه المعلمات على الأقل قيمتها لا تساوى صفر. ويمكن حساب F لاختيار الفروض السابقة من خلال جدول تحليل التباين كما يلى:

جدول تحليل التباين

ANOVA

البيان مصر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط مجموع المربعات	Fc
الإنحدار	k-1	ESS	ESS* / K-1	FC= * / **
البواقى	n-k	RSS	RSS** / K-1	
الكلى	n-1	TSS		

$$Fc = \frac{ESS/K-1}{RSS/n-k} \qquad F(K-1, n-k, \varepsilon)$$

حيث أن Fc هى قيمة F المحسوبة من جدول تحليل التباين، والتــى تساوى متوسط مربعات الإنحدار مقسوماً على متوسط مربعات البواقى.

وبمقارنة Fc المحسوبة بقيمة F الجدولية بدرجات حرية (K-1) للبســط، (n-k) للمقام ومستوى معنوية معين يمكن قبول أو رفض الفرض العدم.

فإذا كانت $Fc \geq F_{(K-1,\ n-k,\ \varepsilon)}$

نرفض الفرض العدم بمستوى معنوية ε ، بمعنى يكون هناك انحداراً خطيا معنويا بين المتغير التابع Y ومجموعة المتغيرات التفسيرية X_k.

أما إذا كانت $Fc \geq F_{(K-1,\ n-k,\ \varepsilon)}$

فإننا نقبل الفرض العدم بمعنى أنه لا يوجد انحــدار خطــى بــين Y ومجموعة المتغيرات التفسيرية X_k بمستوى معنوية ε.

هذا وقد يكون مناسباً فى بعض الأحيــان أن نعبــر عــن قيمــة Fc المحسوبة بدلالة معامل التحديد R^2 كما يلى:

$$Fc = \frac{R^2}{1-R^2}\left(\frac{n-k}{k-1}\right)$$

وتتبع نفس الخطوات السابقة لاختيار فرض العدم H0.

4/3/4ـ معامل التحديد المتعدد R^2 ومعامل التحديد المعدل $\bar{R}^2$

يعرف معامل التحديد R^2 بأنه مربع معامل الإرتباط المتعـدد بيـت المتغير التابع Y ومجموع المتغيرات التفسيرية X_k. أو هو النسبة بين مجموع مربعات الإنحدار ومجموع المربعات الكلى. وعلى ذلك فإن:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\hat{\beta}`X`Y - n\bar{Y}^2}{Y`Y - n\bar{Y}^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29-4)$$

إلا أنه يعاب على R_2 ، لأنه يتزايد دائما مع تزايد عـدد المتغيـرات المستقلة، وذلك بغض النظر عما إذا كانت تلك المتغيرات تلعب أو لا تلعـب دوراً فى تفسير تغيرات Y. ولذلك يفضل استخدام معامل التحديد المعدل $\bar{R}^2$ **للتخلص من هذا القصور.**

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{(n-1)}{n-k}(1 - R^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30-4)$$

وبشكل عام: $\bar{R}^2 > R^2$

وكلما زاد عدد المشاهدات n بصورة كبيرة فإن

$$\bar{R}^2 \approx R^2$$

كما يمكن أن يتخذ $\bar{R}^2$ قيما سالبة أحياناً.

الفصل الخامس

مشاكل النماذج القياسية

الكشف ، الآثار ، العلاج

يواجه الباحث عند استخدامه للنماذج القياسية (نموذج الانحدار الخطى) لتحديد معالم النموذج أو البارامترات الخاصة بنموذجة لبعض المشكلات القياسية، والتى يكون لها آثار غير مرغوبة فى عملية التفسير والتنبؤ. وتنتج عن إهمال أو سقوط أحد الفروض الأساسية بطريقة المربعات الصغرى.

وتمثل أهم هذه الفروض فى:-

1- "النموذج المحدد فى الدراسة .

$$Yi = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + ...\beta_n X_{mi} + \mu i$$

2- المتغير العشوائى (μ) توقعه بصفر $E(\mu)= 0$

3- تباين المتغير العشوائى ثابت ومتجانس فى كل فترة، ولكل قيمة لـ (x)

$$Var(\mu)= \delta\mu^2$$

4- التغاير بصفر بشرط أن $i \neq j$

$$Cov(\mu i, \mu j) = E(\mu i, \mu j)=0$$

فروض خاصة بالمتغيرات الأخرى:-

1- المتغير المستقل (x) يأخذ قيما ثابتة فى المشاهدات المتكررة، ومن ثم (x, μ) غير مرتبطة معا.

$$Cov(x_i, \mu_i) = E(x_i, \mu_i)=xE(\mu)=0$$

2-المتغير العشوائى له توزيع طبيعى توقعه بصفر وتباينه ثابت σ^2.

$\mu i \sim N(0, \sigma^2)$

وترجع أهمية هذا الفرض بشكل خاص إلى أنه لا يمكن استخدام الصيغ المعيارية للتوزيع (t) أو التوزيع (F) بدون هذا الفرض. على الرغم فى أنه يمكن إثبات أن تقدير المربعات الصغرى للمعلمات تكون غير متحيزة بالإضافة إلى كونها متسقة.

ولحسن الحظ- فنظرية النهايات المركزية تمدنا باستخدامات هامة لبعض المقاييس الإحصائية والتى يمكن استخدامها لتحسين التقديرات، ويقوم الاقتصاديين القياسيين باستخدامها. فمثلا يمكن استخدام أحد الاختبارات المباشرة لحساب ما يعرف بالبواقى المعيارية فى الانحدار المتعدد، فنقوم بقسمة الباقى الخاص بكل مشاهدة على الخطأ المعيارى للانحدار، فإذا كان الخطأ يتبع التوزيع الطبيعى فإن توزيع البواقى المعيارية يتبع هو الآخر التوزيع الطبيعى، أو بشكل عام إذا لم نستطع تحويل التوزيع الذى نتعامل معه إلى الشكل الطبيعى، يمكن استخدام توزيع آخر مع مراعاة أننا سوف نستخدم أسلوب آخر للتقديرات واختبارات إحصائية بديلة عن تلك التى كانت موجودة مع التوزيع الطبيعى، أما بالنسبة للفرض الثالث المتعلق بثبات التباين للخطأ العشوائى، فإنه شرط هام فعدم تواجده يعنى أن تقديرات المربعات الصغرى سوف تفقد خاصية الكفاءة. وسوف نقوم بعرض أهم مشكلات القياس بالنماذج القياسية.

1/5ـ عدم ثبات تباين الخطأ العشوائى "Hetero Scedasticity"

يشير اختلاف التباين أو عدم ثبات التباين إلى الحالة التى يكون فيها تباين حد الخطأ غير ثابت عند كل قيم المتغير المستقل أى أن:-

$E(Xi\mu i) \neq 0$ وعليه فأن $E(\mu i)2 \neq \sigma^2\mu$

وهذا يعارض الفرض الثالث لنموذج انحدار OLS. ويحدث هذا في البيانات المقطعية. فعند دراسة العلاقة بين دخل الأسرة وإنفاقها قد يحدث أن يكون تباين الخطأ العشوائى فى الأسر ذات الدخل المرتفع أعلى منه فى الأسر ذات الدخل المنخفض، ومن هنا فإن الإنفاق الاستهلاكى للأسر ذات الدخل المرتفع سوف يكون التأثير نسبيا بالمقارنة بالأسر ذات الدخل المنخفض. ولا تحدث المشكلة المذكورة فى دراسات السلاسل الزمنية، ويرجع هذا إلى أن معظم المتغيرات الاقتصادية تتأثر عبر الزمن بصورة متقاربة، فمثلا كل من الاستهلاك الكلى والدخل الممكن التصرف فيه ينمو بنفس المعدل تقريبا خلال الزمن.

1/1/5ـ الآثار المترتبة على اختلاف تباين الخطأ العشوائى:ـ

وينظر إلى اختلاف تباين الخطأ العشوائى باعتباره مشكلة بسبب:-

1-تقديرات معالم النموذج تظل غير متحيزة ومتسقة

$$\hat{\beta} = \frac{\sum XiYi}{\sum x_i^2} = \frac{\sum Xi(\beta i + \mu i)}{\sum x_i^2} = \beta + \frac{\sum Xi\mu i}{\sum x_i^2}$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta + \frac{E(\sum xiUi)}{\sum x_i^2} = \beta$$

حيث أن $E(\mu)=0$

إلا أنها تكون غير كفء مما يؤثر على جودة النموذج.

2-تقديرات التباين تكون متحيزة، مما يؤدى إلى اختبارات إحصائية غير صحيحة وفترات ثقة متحيزة.

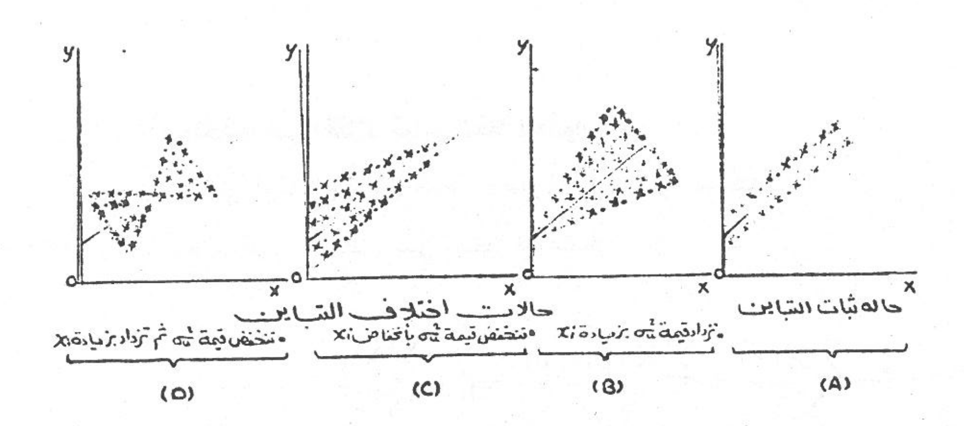
2/1/5ـ الكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين

يمكن الكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين كما يلى:-

1ـ استخدام الأشكال البيانية.

يمكن استخدام الأشكال البيانية للكشف عن عدم ثبات التباين كما فى الشكل رقم (5 -1):

شكل رقم (5-1)
يوضح حالة ثبات وعدم ثبات
تباين الخطأ العشوائى



2- للكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين. يتم ترتيب البيانات من أصغر قيمة إلى أكبر قيمة من قيمة المتغير المستقل xi وإجراء انحداريين منفصلين انحدار للقيم الصغيرة وانحدار آخر للقيم الكبيرة للمتغير xi مع حذف بعض المشاهدات (خمس المشاهدات مثلا). يختبر نسبة مجموع مربعات

الخطأ للانحدار الأول إلى مجموع مربعـات الخطـأ للانحـدار الثـانى (ESS_2/ESS_1) لنرى هل تختلف معنويا عن الواحد.

ويستخدم توزيع (f) بدرجات حرية $(n-d-2K)/2$ حيث أن (n) إجمالى عدد المشاهدات (d) عدد المشاهدات المحذوفة (k) عدد المعالم المقدرة:

وهذا هو اختبار جولد فيلد كوانت لإختلاف التبـاين وهـو مناسـب للعينات الكبيرة ($n \geq 30$) دون حذف المشاهدات الوسيطة، لكن قوتـه فـى اكتشاف التباين تكون أقل.

3/1/5ـ علاج مشكلة اختلاف التباين ((تصحيح عدم ثبات التباين))

"Corrections For Heteroscedosticity"

(1) التباينات المعروفة Known Variances

فى هذه الحالة نفترض أن التباينات المختلفة للخطأ العشوائى معروفة

$$Var(\mu i)= \delta^2 i$$

ومن ثم سنقوم باستخدام طريقـة المربعـات الصـغرى المرجحـة "Weighted Least Squares" والتى تعرف أيضـا بطريقـة المربعـات الصغرى المعممة "Generalized Least Squares" وفيها....

$$Yi = \hat{\alpha} + \hat{\beta} Xi + \mu$$

$$\alpha` = \bar{Y} - \hat{\beta} X$$

$$\beta` = \frac{\sum xiYi}{\sum x_i^2}$$

$$\sum(\mu i)^2 \sum\left[Yi - \alpha`+\beta`xi\right]^2$$

ويتم الترجيح فى طريقة المربعات الصغرى كالتالى:-

يجب أولاً أن نتعرف على الهدف من استخدام طريقة المربعات الصغرى المرجحة والذى يتمثل فى تصغير حجم مربعات الأخطاء إلى أدنى حد ممكن أى إيجاد النهاية الصغرى للمقدار $\sum(\mu i^2)$ بعد إضافة الوزن الترجيحى، نحصل على التقدير المناسب بعد تصغير هذا المقدار. $\sum Ki\mu i^2$

حيث أن: (Ki) تشير إلى الأوزان المرجحة لكل مشاهدة وهى تساوى:

$$Ki = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\sum Ki\mu i^2 = \sum Ki(Yi - \hat{\alpha} - \hat{\beta}Xi)^2$$

إذن

$$= \sum\left(\frac{yi - \hat{\alpha} - \hat{\beta}Xi}{\sigma i}\right)^2$$

وبالإستعانة بطريقة الفروق المرتبطة بالوسط الحسابى تكتب القيمة السابقة كالتالى:

$$\sum\left(\frac{yi - \hat{\beta}`xi}{\sigma i}\right)^2$$

ويمكن استنتاج قيمة $\hat{\beta}$ وذلك بمفاضلة المقدار $\sum Ki\mu i^2$ بالنسبة لـ $\hat{\beta}$ ومساواته بالصفر

$$\frac{\partial \sum Ki\mu i^2}{\partial \hat{\beta}} = -2\sum Ki(Yi - \hat{\beta} xi)xi = 0$$

$$= \sum Ki(Yi - \hat{\beta}`Xi)Xi = 0$$

$$= \sum xixiyi - \hat{\beta} \sum Kixi^2 = 0$$

$$\therefore \hat{\beta} = \frac{\sum KixiYi}{\sum Kixi^2}$$

ومن ثم:

$$\therefore \hat{\beta} = \frac{\sum xiYi / \sigma_i^2}{\sum xi^2 / \sigma_i^2}$$

إذن:-

$$\frac{\sum (Xi/\sigma i)(yi/\sigma)(}{\sum (Xi/\sigma X^{\cdot})^2} = \frac{\sum (xi * Yi*)}{\sum (xi*)^2}$$

حيث أن:

(1) $xi^* = Xi/ \sigma i$

(2) $yi^* = yi/ \sigma i$

ومن ثم يمكن استنتاج النموذج التالى:-

$$Yi^* = \alpha^* + \beta_1 X_1* + \beta_2 X_2* \; \ldots . \beta_k X_k* + \mu*i$$

$$Yi^*/\sigma = \alpha^*/\sigma i + \beta_1 X_1/\sigma i* + \beta_2 X_2/\sigma i + \; \ldots . \; \mu i/\sigma i$$

إذن :-

$$Var(\mu i^*) = Var(\mu i / \sigma i)$$

$$= \frac{1}{\sigma i^2} = Var(\mu i) = \frac{\sigma i^2}{\sigma i^2} = 1$$

فهذا النموذج يحقق كافة الفروض المتعلقة بنموذج الإنحدار بما فيها ثبات تباين الخطأ العشوائى، ويتضح ذلك من خلال دراسة طريقة المربعات الصغرى المرجحة بأسلوب المصفوفات.

طريقة المربعات الصغرى المرجحة بأسلوب المصفوفات:

حيث يمكن التعبير عن فرض ثبات التباين بطريقة المصفوفات على النحو التالى:

$$E(\mu\mu') = \sigma^2 I$$

حيث أن: (I) تشير إلى مصفوفة الوحدة.

ولكن فى حالة إختلاف التباين فإننا نفترض أن:

$$E(\mu\mu') = \sigma^2 \Omega$$

ويلاحظ ان إختلاف التباين يحدث عندما يكون شكل الخطأ العشوائى كالتالى:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

ويلاحظ إختلاف قيم تباين الخطأ العشوائى

$$\left[\sigma_1^2 , \sigma_1^2 ......\sigma_N^2\right]$$

ونلاحظ أيضا أن $Cov=0$.

▪ **فالهدف الرئيسى لتقديرات المربعات الصغرى المعممة**

الحصول على تقدير للمتجه $\hat{\beta}$ بأفضل صورة ممكنة. وذلك بالإستعانة بالمعلومات والتى سبق وإن حصلنا عليها من مصفوفة Ω. وبفرض توافر فروض المربعات الصغرى فيما عدا فرض ثبات التباين، الأمر الذى يمكنا من الحصول على أفضل تقدير خطى غير متحيز، بجانب تحويل البيانات الأصلية ومن ثم تكون مصفوفة Var-Cov للخطأ العشوائى المحول $=\sigma^2 I$، وبمجرد تطبيق هذه القاعدة نحصل على النتائج المطلوبة.

والآن افترض أن (Ω) هى مصفوفة ثابتة وموجبة، والمطلوب إثبات الآتى:-

$$H\Omega H^{`}=I$$

حيث أن:-(H) مصفوفة غير مفردة (nonsingular) من الدرجة N x N *

$$\Omega=H^{-1}(H^{`})^{-1}=(H^{`}H)^{-1}$$

$$\therefore \Omega^{-1}=H^{`}H$$

فى حين أن المصفوفة (H) تستخدم فى التعبير عن النموذج الأصلى ككل:-

$$HY = Hx\beta + H\mu$$

$$Y^{\backslash\backslash} = X^{\backslash\backslash}\beta + \mu^{\backslash\backslash}$$

حيث أن:-

$$(1)\ Y^{\backslash\backslash} = HY$$

$$(2)\ X^{\backslash\backslash} = HX$$

$$(3)\ \mu^{\backslash\backslash} = H\mu$$

إذن:

$$E(\mu^{\backslash\backslash}\mu^{\backslash\backslash`}) = E(H\mu\mu`H`)$$

$$= \sigma^2 H\Omega H` = \sigma^2 I$$

ومن ثم تحسب تقديرات ($\hat{\hat{\beta}}$) كالتالى:-

$$\hat{\hat{\beta}} = [(HX)`(HX)]^{-1}(HX)`(HY)$$

$$\therefore \hat{\hat{\beta}} = [(X`H`Hx)^{-1}X`H`HY$$

إذن:-

$$\hat{\hat{\beta}} = [(X`\Omega^{-1}X)^{-1}X1`\Omega^{-1}Y$$

أما فيما يتعلق بمصفوفة التباينات والتغايرات فيمكن أن نتناولها كالآتى:

مصفوفة التباين والتغاير "Var-Cov"

$$E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)`] = \sigma^2(X^{``}X^{``})^{-1}$$

$$= \sigma^2(X`H`HX)^{-1}$$

$$= \sigma^2(X`\Omega^{-1}X)^{-1}$$

ومن ثم يلاحظ أن طريقة المربعات الصغرى المعممة تتوافق مع تقديرات المربعات الصغرى الأصلية عندما تكون:-

(1) $\Omega = I$

(2)

$$H=\begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma/ \end{bmatrix}$$

لكن لسوء الحظ، هذا الأسلوب محدد جداً فى تطبيقه حيث أن التباينات المختلفة للخطأ العشوائى ليست دائما معروفة.

(2) تباينات الخطأ والاختلاف المباشر مع المتغير المستقل:

فإذا كانت تباينات الخطأ العشوائى غير معروفة فى حين أن، ليس هناك ما يمكنا من التعرف على شكل العلاقة بين تباينات الخطأ العشوائى والمتغيرات المستقلة من خلال شكل انتشار البيانات، تعنى هذه الحالة يجب أن نبحث عن مصدر آخر للمعلومات مع افتراض وجود علاقة بين تباينات الخطأ العشوائى والمتغيرات المستقلة.

بفرض أن معادلة الإنحدار التى بها حالة عدم ثبات التباين هى..

$$Yi = \alpha + \beta Xi + \mu i$$

وإذا افترض (وكثيرا ما يحدث هذا) أن ...

$$Var(\mu i) = CX_i^2$$

حيث (C) ثابت يختلف عن الصفر، فأننا بذلك قد نستطيع تصحيح اختلاف التباين بقسمة أو بترجيح كل حد من حدود الإنحدار على (Xi) وإعادة تقدير الإنحدار باستخدام المتغيرات المحولة فى حالة الإنحدار من المتغيرين.

$$\frac{yi}{Xi} = \frac{\alpha}{Xi} + \beta + \frac{\mu i}{Xi}$$

ويصبح حد الخطأ المحول ثابت التباين

$$Var(\mu i) = var\frac{\mu i}{Xi} = \frac{1}{Xi^2} var(\mu i) = C\frac{Xi^2}{Xi^2} = C$$

لكن يجب توخى الحرص فى تفسير النتائج للإنحدار المحول أو المرجح، فالأخطاء فى المعادلة $Yi=\alpha + \beta Xi + \mu i$ ثابتة التباين، ولذا فإن تقديرات OLS ليست فقط غير متحيزة ومتسقة، ولكنها أيضا كفء. وفى حالة الإنحدار المتعدد، يقسم كل حد فى الإنحدار (أى يرجح) على المتغير المستقل (مثلاً X2i) والذى يظن أنه يرتبط مع حد الخطأ.

$$\frac{Yi}{X2i} = \frac{\alpha}{X_{2i}} + \beta 1\frac{X_{1i}}{X2i} + \beta_2 + \frac{\mu i}{X_{2i}}$$

ويمكن أن نحدد بالنظر ما إذا كانت X2i ، X1i هى المرتبطة مع μi برسم كل من X_{2i} و X_{1i} مقابل بواقى الإنحدار.

مثال: توضيحى يتناول المشكلة سابقة الذكر:

الإنفاق العائلى Housing Expenditures

نفترض وجود مجموعة من البيانات والتى توضح العلاقة بين الإنفاق السنوى والدخل والمأخوذة بأسلوب Cross Section لعينة من أربع عائلات وهى:

Group	Housing Expenditure					Income
1	1.8	2.0	2.0	2.0	2.1	5.0
2	3.0	3.2	3.5	3.5	3.6	10.0
3	4.2	4.2	4.5	4.8	5.0	15.0
4	4.8	5.0	5.7	6.0	6.2	20.2

بإفتراض أن العلاقة بين الإنفاق والدخل يعبر عنها بالعلاقة

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$$

حيث أن:

Y_i هى الإنفاق العائلى

X_i الدخل،

وكانت نتائج إنحدار المربعات الصغرى هى: $\hat{Y} = 0.89 + 0.237 X_i$

مع العلم أن..

* $F=252.7$ * $R^2=0.93$ * قيم (t) المعيارية هى (15.4)(4.4) لكلا من α، β على الترتيب.

وبفحص البيانات سابقة الذكر نلاحظ وجود مشكلة عدم ثبات التباين. حيث يكون من الممكن التغلب على هذه المشكلة والوصول إلى النموذج المحول وهو

$$\frac{Yi}{Xi} = \alpha \frac{1}{Xi} + \beta + \mu i$$

نتائج الإنحدار تكون

$$\frac{Yi}{Xi} = 0.249 + 0.7539 \frac{1}{Xi} \qquad R^2=0.76 \qquad F=58.7$$

ويلاحظ أن قيمة (R^2) والتى تم قياسها فى ظل الأوزان المرجحة أى طريقة المربعات الصغرى المرجحة أقل من قيمة (R^2) والتى تم قياسها مع عدم وجود أوزان مرجحة، ونتيجة لذلك فإن قيمة (R^2) الجديدة تفشل فى إمدادنا بمقياس مفيد قد يستطيع الباحث من خلاله تحديد مدى جودة النموذج.

ولهذا السبب، فإننا نلجأ إلى ما يعرف بالمعلمات المقدرة ذات الكفاءة وذلك لحساب بواقى الإنحدار

$$ei=Yi-0.7529 - 0.249Xi$$

ومن ثم يكون لدينا اختبارين لقياس جودة توفيق النموذج:-

- الأول:وفيه نستخدم الصيغة المعيارية (R^2) وذلك لحساب 1-ESS/TSS.
- الثانى: وفيه نستعين بالمعلمات المقدرة ذات الكفاءة ثم نقوم بإستخدام مقياس جودة التقدير لمربع الارتباط البسيط بين $\hat{Yi}$ و Yi .
- وإذا تم تطبيق أى من الاختبارات فى المثال السابق سيكون مقياس الجودة 0.92.

4/1/5ـ اختبارات أخرى لعدم ثبات التباين

Test for Heteroscedosticity

فهناك العديد من الاختبارات الإحصائية التى يمكن إجراؤها لبحث هذه المشكلة، بالإضافة إلى ما سبق عرضه، وفى كل حالة سنحاول أن نختبر فرض العدم الذى يعنى أن:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_n^2$$

حيث أن: (n) عدد المشاهدات المواجهة للغرض البديل.

أولاً: إختبار جولد فيلد – كواندت ColdFeld-Quandt Test

فى هذا الاختبار سوف نفترض أننا نتعامل مع نموذج ذو متغيرين، ونرغب فى اختبار فرض العدم لثبات التباين فى مقابل الفرض البديل.

$$\sigma_1^2 = CXi^2$$

ومن ثم سنقوم بحساب خطى إنحدار بطريقة المربعات الصغرى..

- **الخط الأول:** لحسابه نقوم بإستخدام البيانات ذات العلاقة بالتباينات الصغيرة للخطأ.
- **الخط الثانى:** ولحسابه أيضا نقوم بإستخدام البيانات ذات العلاقة بالتباينات الكبيرة الخطأ.

خطوات هذا الاختبار:

فخطوات هذا الإختبار كما يترتب إجرائها كما يلى:

(1) نقوم بترتيب البيانات تصاعدياً حسب قيمة المتغير المستقل (X).

(2) نقوم بحذف عدد من المشاهدات الوسيطة (d) (خمس عدد المشاهدات مثلاً).

(3) نقوم بتوفيق إنحدارين مستقلين الأول يتعلق بالبيانات المرتبطة بالقيم المنخفضة لـ (X) والإنحدار الثانى يتعلق بالقيم المرتفعة لـ (X) ، وكل انحدار يتضمن (N-2)/2 مشاهدة بدرجات حرية N-d/2-2 ويجب أن تكون (d) صغيرة بشكل كافى وذلك لضمان أن درجات الحرية المتاحة سوف تعطى لنا التقدير المناسب لكل من الإنحدارين المستقلين.

(4) القيام بحساب قيمة بواقى المربعات المتعلقة بكل إنحدار ESS1 والذى يتعلق بالقيم المنخفضة، لـ (X) وكذلك ESS2 والذى تتعلق بالقيم المرتفعة (S).

(5) نفترض أن الخطأ العشوائى له توزيع طبيعى (ولا يوجد إرتباط سلسلى) وبالتالى فإن القيمة الإحصائية ESS_1/ESS_2 سوف تكون موزعة مثل (F) مع وجود درجات حرية لكل من البسط والمقام مقدارها (N-d-4)/2 ومن هنا يمكن رفض فرض العدم عند مستوى معنوية معين ولو أن "الأداة الإحصائية المحسوبة كانت كبيرة بالمقارنة بقيمة F".

وعلى هذا الأساس يمكن القول أن اختبار جولدفيلد اختبار يمكن تطبيقه بسهولة على النموذج الخطى العام وذلك من خلال عدد معين من المشاهدات المتعلقة بواحد من المتغيرات المستقلة. ومن ثم فدرجات الحرية بالنسبة للقيمة المحسوبة (F) (N-d-2k)/2 حيث أن (K) تشير إلى عدد المتغيرات المستقلة فى النموذج، (d) تشير إلى المشاهدات المحذوفة.

لكن يؤخذ على هذا الاختبار. عدم وجود قاعدة يتم مــن خلالهــا تحديد عدد المشاهدات التى سيتم حذفها، ففى كثير من الأحيان يصعب تحديد تلك المشاهدات فى حين أن تحديد تلك المشاهدات سواء لعــدم أهميتها أو لارتباطها بالخطأ العشوائى، فإن ذلك سوف يــؤدى إلــى تحسين نوعية الاختبار.

مثال: تطبيقى لاختبار جولدفيلد – كواندت

يمكن تطبيق هذا الإختبار على المثال الخاص بتحديد حجــم الإنفــاق العائلى، حيث يفترض أن البيانات التى تم الحصول عليها قسمت إلى عينتــين الأولى لذوى الدخل المنخفض حيث قد يصل دخلهــم إلــى 5.000 دولار، 10.000 دولار والعينة الثانية تتضمن الأسر أصحاب الدخل المرتفع فقد يصل دخلهم إلى 10.000 و 20.000 دولار. "ليس هناك مشــاهدات محذوفــة أو مهملة"

والنتيجة التى حصلنا عليها من معادلتى الإنحدار المستقلتين كانت كالتالى:-

1- Low Income Families:

$$Yi = 0.600 + 0.276Xi \qquad R^2=0.94 \qquad Ess_1=0.3000$$
$$(3.1) \quad (11.3)$$

2- High-Income families:

$$Yi=1.54 + 0.20Xi \qquad R2=0.55 \qquad Ess2=2.024$$
$$(1.4) \quad (3.1)$$

وهنا يمكن استخدام قيمة F المحسوبة لإختبار فرض ثبات التباين عن طريق القيمة Ess_2/Ess_1 وهى تساوى 6.7 وتوزع مثل توزيع F بــدرجات حرية لكل من البسط والمقام.

وحيث أن القيمة الجدولية الإنتقائية لتوزيع F عند مستوى معنوية 1% تكون 3.44 فإننا نقوم برفض الفرض العدمى فى مقابلة الفرض البديل الذى يعنى عدم ثبات التباين.

ثانيا: اختبار برويش – باجان Breusch- Pagan Test

وهذا الاختبار أبسط فى تجريبه وذلك مقارناً بالاختبار السابق، ويوضح هذا الاختبار من خلال النموذج الآتى:

$$Yi = \alpha + \beta Xi + \mu i$$

$$\sigma i^2 = F(y + \theta zi)$$

فهذا الإختبار يتضمن إفتراضات عامة عن العلاقة بين تباين الخطأ الحقيقى والمتغير المستقل (Z) فقيمة F تمثل الدالة العامة التى يمكن إستخدامها سواء فى الشكل الخطى أو اللوغاريتمى، (Zi) والتى قد تشير إلى المتغير المستقل (X) أو مجموعة المتغيرات المستقلة بالنسبة لـ (X).
ولاختبار عدم ثبات التباين. نقوم بحساب بواقى المربعات الصغرى (ei) من معادلة الإنحدار $Yi = \alpha + \beta Xi + \mu i$ فى نفس الوقت الذى نقوم فيه بإستخدام هذه البواقى لتقدير $\hat{\sigma}^2$ وهى تساوى $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{N}$ ومن ثم فمعادلة الإنحدار تكتب كالآتى:

$$\frac{e_i^2}{\hat{\sigma}^2} = y + \sigma zi + vi$$

فإذا كان توزيع الخطأ العشوائى فى معادلـــة الإنحـــدار $Yi = \alpha + \beta Xi + \mu i$ يتبع توزيعا طبيعيا، لأدى ذلك إلى إختفاء مشكلة عدم ثبات التباين، ولمعرفـــة نقوم بتصنيف قيمة الإنحدار للمربعات Rss/2 فتعطينا إختبار ملائم حيث أن:

$$Rss/2 \sim x^2{}_1$$

وبشكل عام كلما ارتفعت قيمة الإنحدار للمربعات كلما إزداد إرتباط z مع تباين الخطأ، ونتيجة لذلك يرفض الفرض العدمى.

ويستخدم اختبار pagan للتأكد من عدم ثبات التباين فى حالة المتغير المفرد، فإننا نقوم بتحويل المعادلة الأصلية بإستخدام المتغير Z على عكـــس المعادلة $Yi = \alpha + \beta Xi + \mu i$.

** **اختبار وايت** **The White Test**

قدم هذا الاختبار هال وايت، فقد قدم اختباراً لا يعتمد علـــى شـــروط ضرورة تبعية الخطأ العشوائى للتوزيع الطبيعى، فهذا الشـــرط لـــه أهميتـــه الخاصة فى إختبار (برويش – باجان) إلا أنه ليس هاماً هنا ...

ويفترض هذا الإختبار إمكانية إستخدام بواقى الإنحدار للوصول إلـــى المعادلة الآتية:-

$$e_i^2 = y + \sigma Zi + Vi$$

فمن خلال هذا النموذج نقوم بحساب (R^2) والتى تقودنا للتعرف على مدى جودة النموذج وعدما يكون هناك ثبات للتباين تكون:

$$NR^2 \sim X^2$$

مع وجود درجة حرية واحدة، ومن الواضح أن اختبار كلا من (وايت وباجان) متماثلان إلى حد كبير، فكلاهما يمكن أن يكون اختبار تطبيقى.

ويقترح وايت أنه فى حالة وجود علاقة وثيقة بين التباين والمتغير X فإنه لابد من استعمال المتغيرات X ، X_2 وذلك بهدف تحويل النموذج إلى الشكل غير الخطى. مع ضرورة مراعاة استعمال القيم Z^2, X^2 بالإضافة XZ وذلك فى حالة وجود متغيرات مناسبة مثل Z, X.

مثال تطبيقى لكلاً من اختبارى برويش – باجان ووايت

يمكن تطبيق تلك الاختبارات على مثال الإنفاق العائلى، لذلك وسوف نقوم بالتعبير عن عدم ثبات التباين بالصيغة التالية:-

$$\sigma_i^2 = y + \sigma Xi$$

ولكى نتمكن من تطبيق اختبار Breusch – Pagan نحصل أولاً على إنحدار Y/X ثم نقوم بحساب بواقى الانحدار متخذ أن $\sigma_i^2 = 0.12523$ بالتالى يمكن الحصول على البواقى الطبيعية والتى بانحدارها على X نحصل على:-

$$\frac{e_i^2}{\hat{\sigma}^2} = -0.853 + 0.148Xi + \hat{y}$$

أى أن قيمة إنحدار المربعات والذى يحسب من (R2) يساوى 13.732 ولهذا السبب فالاختبار الإحصائى يكون RSS/2 = 6.866.

وهو اختبار يتبع توزيع Chi-Square (كا تربيع (S)) بدرجة حرية I وطالما القيمة الجدولية لتوزيع Chi-square تكون 3.84 عند مستوى معنوية 5%، فإننا نقوم برفض الفرض العدمى، بالتالى يوجد عدم ثبات للتباين.

ولكن من الناحية الواقعية وجد أن اختبار White اختبار سهل التطبيق، فقيمة R^2 المتعلقة بإنحدار البواقى تكون 0.36 وهى قيمة لا تتبع التوزيع الطبيعى.

والواقع إن القيام بإضافة أى قيمة للمتغير التابع أو مضاعفة قيمته لا تؤثر على جودة توفيق النموذج، ولهذا السبب فإن الاختبار الإحصائى التقريبى يصبح $20(R^2)=7.20$.

فهذا الاختبار يتبع توزيع Chi-Square بدرجة حرية تساوى واحد ومرة أخرى نقوم برفض الفرض العدمى لثبات التباين حيث أن $(7.20>3.84)$.

وفى النهاية نقول أن اختبار White (أو اختبار Breusch-Pagan) يمكن تطبيقه بالنسبه لأى شكل دالى للمتغير X حيث نقوم بحساب إنحدار البواقى المربعة لـــ X^2, X.

- فالنتائج التى تم الحصول عليها سجلت كالآتى:

$$\hat{e}_i^2 = 0.922 - 0.0212X_i + 0.0016X_i^2$$

حيث أن:-

(1) $R^2 = 0.4130$

(2) الإختبار الإحصائى التقريبى $20(R^2) = 8.260$

وهو توزيع Chi-Square بدرجة حرية تساوى 2، والقيمة الجدولية لتوزيع Chi-Square تساوى 5.99، ومن ثم نقوم برفض الفرض العدمى الذى يعنى ثبات التباين طالما $(8.26>5.99)$.

2/5 - الارتباط الذاتى Auto Correlation

إن أحد الافتراضات الهامة التى يقوم عليها نموذج الإنحدار الخطى هو استقلال قيم الخطأ العشوائى عن بعضها البعض، فإذا لم يتحقق هذا الإفتراض فإننا نقول أن هناك إرتباط ذاتى بين قيم عنصر الخطأ العشوائى، ومن ثم فقيمة ei فى فترة معينة ستكون مرتبطة بقيمتها فى الفترات السابقة ومثال على ذلك عندما نقوم بالتنبؤ بنمو العائد على السهم فإن المغالاة فى التقدير فى أحد السنوات سوف تؤدى إلى مغالاة فى التقدير فى السنوات التالية.

ويلاحظ أن الإرتباط الذاتى من الممكن أن يكون سالب أو موجب، وسوف نهتم بحالة الإرتباط الذاتى الموجب حيث يرتبط الخطأ العشوائى فى فترة معينة مع الخطأ فى الفترة السابقة أو القادمة إرتباطاً موجباً.

وعادة ما يحدث هذا النوع من من الإرتباط فى دراسات السلاسل الزمنية، حيث يؤدى حذف أو عدم إدخال بعض المتغيرات فى النموذج إلى ظهور الإرتباط الذاتى الموجب. فمعظم المتغيرات الإقتصادية تميل إلى الإرتباط بشكل متسلسل ومن الطبيعى أن يؤدى حذف متغير مترابط سلسلياً إلى إحداث ترابط متسلسل فى عنصر الخطأ العشوائى.

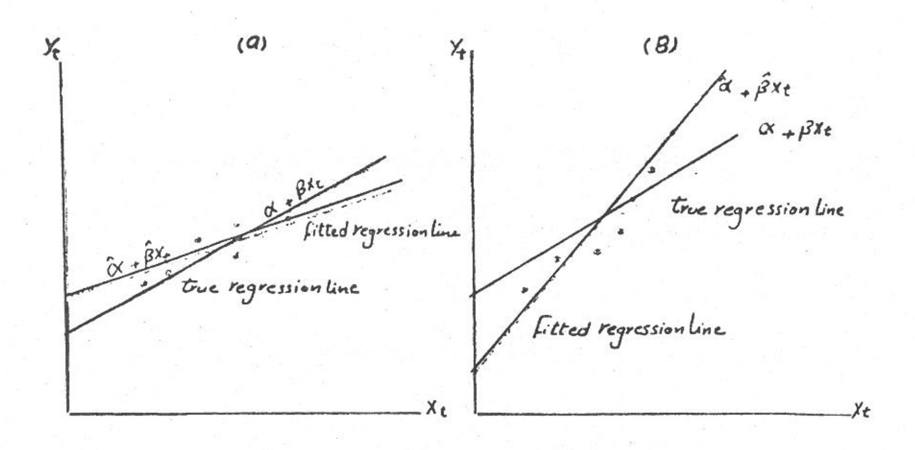
فقد تؤدى بعض المتغيرات العشوائية الطارئة إلى حدث ترابط فى قيم الخطأ العشوائى لعدة فترات - كالكوارث الطبيعية مثلاً، حيث يجب أن نلاحظ أن وجود هذه المشكلة لا يؤدى إلى فقدان خاصية عدم تحيز التقديرات، فتقديرات المربعات الصغرى المعتادة تظل غير متحيزة، وبعبارة أخرى "تظل تقديرات المربعات الصغرى خطية وغير متحيزة ومتسقة ولكن لا يكون لها اقل تباين". ومن ثم تفقد طريقة المربعات الصغرى خاصية الكفاءة.

فهذه المشكلة قد تحدث بشكل محدود جداً فى الدراسات المبينة على البيانات المقطعية، الإرتباط الذاتى عادة ما يكون تجمع لكل المتغيرات المهملة خاصة عندما تكون ذو درجة مرتفعة، ومما لا شك فيه أن هذا الأمر يؤثر على تقديرات المربعات الصغرى، حيث يتركز تأثيره فى جعل الأخطاء المعيارية أقل بالمقارنة بالأخطاء المعيارية الحقيقة، وهو أمر يقودنا إلى إمكانية رفض الفرض العدمى عندما يكون صحيحاً، فهذه نقطة لا تحتاج إلى إثبات بقدر ما تحتاج إلى بعض التأمل.

ويمكن بيان ذلك من خلال دراسة الشكلين الآتيين حيث يشير إلى وجود إرتباط سلسلى فى النموذج مع وجود متغير تفسيرى واحد.

شكل رقم (5-2)

يوضح الإرتباط السلسلى الموجب



فكلا من الشكلين a, b يصوران حالة وجود الإرتباط الذاتى الموجب، ففى الشكل (a) نلاحظ أن عنصر الخطأ العشوائى يرتبط مع المشاهدات الأولى بشكل موجبا، وهذا يؤدى إلى تسلسل أو تتابع عناصر الخطأ العشوائى فالأربع

مشاهدات الأولى تكون موجبة والمشاهدتين الآخرتين سالبتين. وفى الشكل (b) لاحظ أنها حالة معاكسة تماماً للحالة الأولى فالأربع تقديرات الأولى للخطأ العشوائى تكون سالبة والمشاهدتين الآخرتين يكونا موجبتين.

ففى الحالة الأولى نجد أن الإنحدار المقدر يكون أقل من الإنحدار الحقيقى، بينما فى الحالة الثانية يكون الإنحدار المقدر أ من الإنحدار الحقيقى، ويبدو أنه من المعقول أن يكون تقدير الإنحراف بطريقة المربعات الصغرى سوف يكون صحيح فى المتوسيط إذ أنه يكون غير متحيز.

وفى كل حالة من هاتين الحالتين نجد أن خط الإنحدار المقدر بطريقة المربعات الصغرى قد عبر عن بيانات العينة بشكل أكثر دقة من خط الإنحدار الحقيقى، كذلك المربعات الصغرى سوف تؤدى إلى تقدير تباين الخطأ العشوائى بأقل من قيمته الحقيقية.

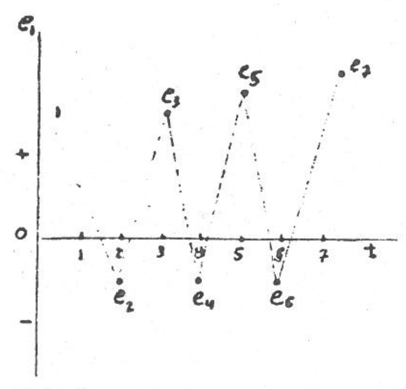
والخلاصة هنا (أنه عند وجود الإرتباط الذاتى فى عنصر الخطأ العشوائى يكون هناك تحيز إلى أدنى درجة ممكنة Down word bias فى تقدير تباين المعلمات المقدرة باستخدام الصيغة المعتادة).

- **لكن تحديد طبيعة هذه المشكلة بشكل أكثر دقة لابد من توضيح الآتى:**

إذا كان حد الخطأ فى فترة زمنية مرتبطاً بحد الخطأ فى الفترة الزمنية السابقة يكون هناك ارتباط ذاتى من الدرجة الأولى والذى تتضمنه معظم التطبيقات فى الإقتصاد القياسى بشكل أكثر من الدرجة الثانية، ويعنى الإرتباط الذاتى الموجب من الدرجة الأدنى أن ($F\mu\mu_{i}-1>0$) وهذا إخلال لغرض OLS وهذا شائع فى تحليل السلاسل الزمنية.

شكل رقم (3-5)

يوضح الإرتباط السلسلى الموجب



إرتباط ذاتى موجب من الدرجة الأولى
"يظهر عندما يكون لعدد من البواقى
المتتالية نفس الإشارة"

ارتباط ذاتى سالب من الدرجة الأولى
"يظهر عندما تتغير إشارات البواقى
المتتالية كثيراً"

ومن ثم يمكن تحديد طبيعة المشكلة فى النقاط التالية والآثار المترتبة عليها:-

- بوجود الإرتباط الذاتى تظل تقديرات OLS (غير متحيزة ومتسقة)، لكن الخطأ المعيارى لمعالم الإنحدار المقدرة تكون (متحيزة) مؤدية إلى الإختبارات إحصائية غير صحيحة وفترات ثقة متحيزة).
- إذا كان الإرتباط الذاتى من الدرجة الأولى موجباً تكون الأخطاء المعيارية المقدرة متحيزة إلى أسفل، ومن ثم يكون هناك مبالغة فى الدقة فى المعنوية الأحصائية لمعالم الإنحدار المقدرة.

<u>الإرتباط السلسلى وكيفية اختبار وجودة:</u>

يحتبر وجود الإرتباط الذاتى بحساب إحصائية (ديربن – واتسون) d والتى تعطى بشكل روتينى كأحد نواتج برامج الكمبيوتر مثل SPSS:-

$$d = \frac{\sum (ei - e_{i-1})^2}{\sum ei^2}$$

وتتراوح القيمة المحسوبة لـ d بين 0,4 ولا يكون هناك ارتباط سلسلى d قريبة من 2 .

ارتباط ذاتى سالب | غير حاسم | ← لا يوجد ارتباط سلسلى → | غير حاسم | ارتباط ذاتى موجب

0 — dL — dU — 2 — 4-dU — 4-dL — 4

قيم (d) تشير إلى وجود أو غياب الإرتباط الذاتى من الدرجة الأولى، والتى تجعل الاختبار غير حاسم وعندما يظهر المتغير التابع المبطأ كمتغير مفسر فى الإنحدار، فإن تكون متحيزة نحو (2) وتضعف من قوتها فى الكشف عن الإرتباط الذاتى.

علاج مشكلة الإرتباط الذاتى "تصحيح الإرتباط المتسلسل"

Corrections for Serial Correlation

نفترض أن كل عنصر من عناصر الخطأ العشوائى فى نموذج الإنحدار الخطى يتبع التوزيع الطبيعى بقيمة متوقعة تساوى صفر وتباين ثابت، لكن قيم الخطا العشوائى ليست مستقلة عن بعضها البعض، ومن ثم

سوف نقوم بإستخدام الرمز (t) بدلا مـــن (i) وبـــافتراض أن الـــرقم الكلـــى للمشاهدات يكون (T) والنموذج بذلك يكون..

- $Yt = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_2 + \dots\dots\dots\dots + \beta_k X_{kt} + \mu_t$

- $\mu_t = M\mu_{t-1} + V_t \qquad 0 \leq |p| < 1$

من العلاقة السابقة نفترض أن هناك إرتباطاُ ذاتى من النوع البسيط حيث أن Vt موزعة توزيعاً طبيعيا بمتوسط يساوى الصفر وتبـــاين σ_v^2 أى أن $Vt \sim (0، \sigma_v^2)$ بالإضافة إلى استقلالها عن عناصر الخطـــأ العشـــوائى الأخرى خلال الزمن (أى أن V_t يتحقق بها مواصفات عنصـــر الخطـــأ العشوائى) فهى مستقلة عن قيمة μ_t حيث أن μ_t موزعة توزيعا طبيعيـــا بمتوسط يساوى الصفر وتباين σ^2 أى أن $\mu_t \sim N(0، \sigma^2)$ فتلك القيمة غير مستقلة عن عناصر الخطأ العشوائى الأخرى.

فالمعادلة السابقة نابعة من القاعدة التى مقتضاها ان الخطأ فى فتـــرة معينة "الفترة t" بتقليل قيمة الخطأ فى فترة ماضية "بالضـــرب * P" ثـــم إضافة تأثير المتغير العشوائى، والذى كان له قيمة متوقعة تساوى الصفر وهذا ما يعرف بـــ First-order autoregressive Process.

ويلاحظ انه من السهل ضبط تأثير الخطأ العشـــوائى فـــى أى فتـــرة معطاة، بالتالى يمكن التأثير على قيمة الخطأ العشوائى والتى تم تصغيرها عبر الزمن، وذلك عن طريق تكبير هذه القيمة بالنسبة للفتـــرات الزمنيـــة المستقبلية، وسوف نقوم بحساب تغاير μ فى كل الفترات الزمنية السابقة على النحو الآتى:

$$\text{Var}(\mu_t) = E(\mu_t^2) = [(m\mu_{t-1} + V_t)^2] = E(m^2\mu^2{}_{t-1} + V_t^2 +^2 m\mu_{t-1}V_t)$$

$$= m^2E(\mu_{t-1}^2) + V_t^2$$ حيث أن μ، v مستقلين

$$= m^2Var(\mu_t) + \sigma_v^2$$

وتحل:

$$\sigma_v^2 = Var(\mu_t) - m^2Var(\mu_t)$$

$$= m^2(\mu_t)$$

$$\sigma_v^2 = Var(\mu_t) - (1 - m^2)$$

$$Var(\mu_t) = \frac{\sigma_v^2}{1 - m^2} = \sigma^2\mu_t$$

$$\text{Cov}(\mu_t\mu_{t-1}) = E(\mu_t\mu_{t-1}) = E[m\mu_{t-1} + V_t)\ \mu_{t-1}]$$

$$= E(m\mu_{t-1}^2 + V_t\mu^{t-1}) = mE(\mu_{t-1}^2)$$

$$= m\,\text{var}(\mu_t) = m\sigma^2\mu$$

والطريقة الملائمة

$$\text{Cov}(\mu_{t-1.}\,(\mu_{t-2}) = E(\mu_t\mu_{t-2}) = m^2\sigma_\mu{}^2$$

$$\text{Cov}(\mu_{t.}\,(\mu_{t-3}) = E(\mu_t\mu_{t-3}) = m^3\sigma_\mu{}^3$$

ويلاحظ أن قيمة المعامل m والذى يعبر عن معامل الإرتباط يمكن حسابه من خلال الصيغة

$$m = \frac{\text{cov}(\mu_t, \mu_{t-1})}{\sigma_\mu^2} = \frac{\text{cov}(\mu_t, \mu_{t-1})}{[\text{var}(\mu t)]^{1/2}[\text{var}(\mu_{t-1}]^{1/2}}$$

حيث أن:

$$\sigma_\mu^2 = \text{var}(\mu_t) = \text{Var}(\mu_{t-1})$$

فقيمة m تعبر عن معامل الإرتباط بين الأخطاء فى الفترة الزمنية (t) والأخطاء فى الفترة (t-1) وعندما تساوى m الصفر فهذا يعنى عدم وجــود حالة ارتباط ذاتى فى حين أنه عندما تزداد قيمة m فإن هذا يدل على وجــود الإرتباط الذاتى وقد تزداد قيمة m وتصل إلى قيمتها العظمى وهــى الواحــد الصحيح.

وإذا كانت قيمة (m) معلومة فيكون من السهل تعديل طريقة المربعات الصغرى الأصلية للحصول على تقديرات ذات كفاءة للمعلومات، وهذا يتضمن ما يعرف بطريقة الفروق المعممة generalized differencing وهى تقوم على أساس تعديل النموذج الخطى إلى نموذج آخر تكون قيمة الأخطاء مستقلة بإفتراض أن

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{2t-1} + \ldots\ldots \beta_2 Xk_{t-1} + \mu_{t-1}$$

وبضرب هذه المعادلة فى m وطرحها من المعادلة

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{2t} + \ldots\ldots \beta_k X_{kt} + \mu_t$$

ومن ثم نحصل على المعادلة الآتية:

$$Y^*_t = \alpha(1-m) + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{2t} + \ldots\ldots \beta_k X_{Kt} + V_t$$

حيث أن:

$$Y^*_t = Y_t - mY_{t-1} \qquad Y^*_{2t} = Y_{2t} - mY_{2t-1}$$

$$Y^*_{kt} = Y_{kt} - mY_{kt-1} \qquad V_t = \mu_t - m\mu_{t-1}$$

فهناك ثمة صعوبة تكتنف طريقة الفروق المعممة، فالمعادلة المحولة تظهر فقط عند الفترات الزمنية 2,3.......t وبإسقاط الفترة الزمنية الأولى من نتائج عملية الإنحدار. وعندما يكون هناك نقص فى المعلومات لدينا، فهذا سوف يسبب نوع من الخلل داخل النموذج، والحل هنا يكون عن طريق أخذ الفترة الزمنية الأولى وعدم إهمالها يشترط أن نقوم بالآتى...

$$Y_t^* = \sqrt{1-m^2 yi} \qquad X_{21}^* = \sqrt{1-m^2 yi}\ldots\ldots X^* Ki = \sqrt{1-m^2 Xki}$$

ففى هذه الحالة قمنا باحتساب الفترة الأولى فإن تباين الخطأ العشوائى سوف يساوى كل التباينات فى الفترات الزمنية الأخرى.

$$\mu^* i = (1-m^2)^{1/2}\, \mu i, \;\; Var(\mu i^*) = (1-m^2) Var(\mu i) = \sigma_v^2$$

فهذه الحالة يكون فيها معامل الإرتباط أقل من الواحد فما الذى يحدث حينما يتساوى قيمة معامل الإرتباط مع الواحد الصحيح؟

فهذه الحالة فى حقيقة الأمر ذات فائدة خاصة لأنها تؤدى بشكل عام إلى استخدام ما يعرف بإجراءات التقدير عن الفروق الأولى First

differencing وهذه الفروق تعد بمثابة إجراءات لحل المشكلة وذلك يكون عن طريق استخدام أسلوب يماثل عملية الفروق المعممة بالشكل الآتى:

$$Y_t = \beta_2 X^*_{2t} + \beta_3 X^*_{3t} + \ldots\ldots \beta_k X^* k_{Kt} + V_t$$

حيث أن:

$$Y^*_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$Y^*_{2t} = Y_{2t} - Y_{2t-1}$$

$$X^*_{kt} = X_{Kt} - Y_{Kt-1}$$

$$Vt = \mu_t - \mu_{t-1}$$

لكن هذه الطريقة تحتاج إلى مقدار ثابت، وقد تلاحظ أن هذا المقدار كان يمكن معرفته من خلال النموذج البسيط ذو المتغيرين من الصيغة $(\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x})$ لكننا قد يكون بإمكاننا التعرف على قيمة هذا المقدار عن طريق حل المعادلة الأصلية، وذلك بإيجاد قيم المتغيرات الموجودة فى هذه المعادلة أى إيجاد القيمة المتوسطة لها.

إلا أن الطريقة المعممة قد تكون نافعة جداً فى حالة معرفة قيمة m ، وذلك بعدة طرق لكل منها بعض المزايا وبعض العيوب، لكن على الرغم من ذلك قد تؤدى تلك الطرق إلى قياس المعلمات بالمميزات المطلوبة وذلك عندما يكون حجم العينة كبير، لكن قد يصعب الوصول إلى المميزات المطلوبة فى حالة العينات الصغيرة.

ويلاحظ وجود طرق أكثر صعوبة من السابقة والتى قد تكون بديل يتعلق بإيجاد الحد الأقصى للتقدير الإجمالى للمعلمات α ,β ,σ_v^2 وهى

المختارة لتقليل اللوغاريتم الإحتمالى للدالة أى "إيجاد الحد الأدنى لقيمة الدالة الآتية مع ملاحظة أن الطريقة المذكورة هى طريقة الإمكان الأعظم".

$$Log(L) = -\left(\frac{1}{2}\right)\log(1-m^2) - \left(\frac{N}{2}\right)\log(2\pi\sigma_v^2)\left(\frac{1}{2\sigma_v^2}\right)\sum v_v^2$$

طريقة كوشران – أوركت The Cochrane – Orcutt Procedure

وتشتمل هذه الطريقة على متسلسلة تكرار ينتج عنها تقدير للمقدار m يكون أفضل من التقدير السابق، وتعتمد على أن m هى معامل الإرتباط بين الأخطاء المرتبطة عبر الزمن وتستخدم طريقة المربعات الصغرى الأصلية لتقدير النموذج الأصلى كما هو موضح بالمعادلة.

$$Yt=\alpha+\beta_1X_t+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+\ldots\ldots+\beta_kX_{kt}+\mu_t$$

ومن خلال هذه المعادلة نحصل على قيمة البواقى التى نستخدمها لإيجاد الإنحدار.

$$\hat{e}_t = m\hat{\mu}_{t-1}+V_t$$

ومن هنا نحصل على قيمة $\hat{e}_t$، m التى نستخدمها لإيجاد نموذج إنحدار جديد فى ظل طريقة الفروق المعممة للتحويل Generalized differencing Transformation، ونموذج الإنحدار الجديد يكون:

$$Y^*_t=\alpha(1-\hat{m})+\beta_1X^*_{2t}+\beta_2X_{2t}\ldots\ldots+\beta_kX^*_{kt}+v_t$$

حيث أن:

$$Y^*_t = Y_t - \hat{m} Y_{t-1}$$
$$X^*_{2t} = Y_{2t} - \hat{m} X_{2t-1}$$
$$X^*_{kt} = X_{Kt} - \hat{m} X_{Kt-1}$$

ومن هذه المعادلة الجديدة ينتج لنا قيم المعلمات ... المقدار الثابت $\hat{\alpha}$ وكذلك جميع معلمات الإنحدار الأخرى $\hat{\beta}_1 .... \hat{\beta}_k$ وهذه المعلمات المقدرة تم تحويلها فى المعادلة الأصلية والبواقى المقدرة تعرفها من خلال بواقى الإنحدار الجديدة.

$$\hat{e}t = y_t - \hat{\alpha} - \beta_1 X_{2t} - \bar{X}\beta_2 X_{2t} .... - \bar{Y} \beta_k X_{kt}$$

وبإجراء الإنحدار بشكل متكرر نحصل على ....

$$\hat{e}t = m \hat{\hat{\mu}}_{t-1} + V_t$$

وبهذه العلاقة يمكن الحصول على تقدير جديد للمقدار m. ونوقف هذه العملية عندما يختلف التقدير الجديد للمقدار m عن القديم بحوالى 0.01 أو 0.005 أو بعد إجراء 10 ,20 تقدير للمقدار (m). وعلى الرغم من ذلك يمكن القول بصفة عامة، أنه ليس هناك ما يضمن أن التقدير النهائى للمقدار سوف يقلل بواقى الانحدار إلى أدنى درجة ممكنة، إذن أن عملية التكرار ذاتها تتضمن تكاليف والتى قد تؤدى أيضاً إلى صعوبة فى الوصول للحد الأدنى للبواقى.

طريقة هيلدرث The Hildreth-Lu Procedure

وفى ظل هذه الطريقة نقوم باختيار مجموعة من القيم للمقدار m، فهذه القيم سوف تساعدنا على التخمين Guesses فى القيم التى تأخذها m، فلو كان هناك ارتباط متسلسل موجب فإنه يمكن اختيار مجموعة من القيم لـ m وهى 0,01, 02, 03, 04, 050000, 1.0 وبالتالى فالمعادلة المحولة تكون:

$$Y_t=\alpha(1-m)+\beta_1X^*_{1t}+\beta_2X^*_{2t}\ldots\ldots+\beta_kX^*_{kt}+v_t$$

فهذه الطريقة تسمح لنا باختيار المعادلة التى تحقق أصغر مجموع لمربعات البواقى وهى أفضل معادلة بالطبع ...

فيمكن أن نختار لـ (m) قيماً متجاورة كاختيار أولى حتى نصل إلى الدقة المطلوبة وعندما يتم اختيار قيم (m) فإن هذا من شأنه أن يؤدى إلى تقريب الحد الأقصى "الإحتمال الأقصى" لقيمة (m) وهو ما يعنى أن القيمة التى حصلنا عليها لمجموع المربعات عند حدها الأدنى وتكون أكثر شمولاً.

3/2/5 اختبارات الإرتباط الذاتى Tests for Correlation

سنقدم فى هذا الجزء اختبار دربن - واتسون

إختبار دربن ـ واتسون Durbin-Watson Test

وهو أحد الإختبارات الشائعة للإرتباط الذاتى، حيث يتضمن حساب الاختبارات الإحصائية المبنى على البواقى من عملية الإنحدار الخاصة بالمربعات الصغرى المعتادة.

فالأسلوب الذى يتبعه هذا الاختبار يقوم على اختبار الفرض العدمى الذى يعنى عدم وجود إرتباط ذاتى أى أن m=0 فى مواجهة الفرض البديل

الذى يعنى وجود هذا الاختبار أى أن m≠0 وهو ما يؤكد وجود اختبـــار ذو طرفين حيث أن m قد تكون أكبر وأصغر من الصفر.

فالأداة الإحصائية الخاصة بهذه الاختبار هى:

$$Dw = \frac{\sum\left(\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1}\right)^2}{\sum \hat{e}_t^{\,2}}$$

وهنا يمكن القول أنه عندما تكون قيم $(\hat{e}_t)$ قريبة من بعضها البعض، فإن قيمة (Dw) سوف تكون منخفضة وهو ما يعنى وجـــود ارتبـــاط ذاتـــى موجب، كذلك يلاحظ أن القيمة (Dw) لها مدى ينحصر بين (0,4) وعنـــدما تكون (Dw) مساوية للرقم (2) أو قريبة منه، فهذا يشير إلـــى عـــدم وجـــود ارتباط ذاتى من الدرجة الأولى.

وعندما نتمكن من إجراء هذا الاختبار عدة مـــرات يتضـــح لنـــا أن $Dw = 2(1-\hat{m})$. ومن هنا نستطيع أن نقول أنه فى حالة عدم وجود ارتباط ذاتى فإن m=0, وبالتالى Dw=2 وعندما تكون قيمة Dw أقل من (2) فـــإن هذا يدل على وجود إرتباط ذاتى موجب، بينما عندما تكون هذه القيمة أعلـــى من (2) فإن هذا يعنى وجود ارتباط ذاتى سالب.

ويمكن القول أن التفسير الدقيق للقيمة الإحصائية (Dw) صعب إلـــى حداً كبيراً لأن تتابع الخطأ لا يعتمد فقط على تتابع قيم (e) بل يعتمد أيضـــاً على تتابع قيم (X). ولهذا السبب فإن مطعم الجـــداول تتضـــمن إحصـــائيات اختبار تختلف مع عدد المتغيرات المستقلة وعدد المشاهدات.

وقد نستطيع من وضع مدى معين للمدى الذى تتغلب فيه قيمة (Dw)، وهذا المدى يحدد بالزمن dl, du حيث أن الحد الأدنى للقيمة Dw هو الصفر والحد الأقصى هو 4 ومن ثم يمكن استخدام ذلك للتعبير عن اختبارات الفروض بحيث أننا يمكن أن نرفض الفرض العدمى عندما تكون قيمة (Dw) أقل من dl وإذا كانت Dw أكبر من du فإننا نقبل الفرض العدمى.

وبعبارة أخرى نقول أنه يمكن رفض الفرض العدمى عندما تكون 4-dl<Dw ونقبل هذا الفرض إذا كانت قيمة Dw أقل من 4-du وأكبر من du. ويمكن القول هنا أن وجود ذلك المدى للإختبار الإحصائى يرجع إلى متتابعة البواقى تتقلب عن طريق حركة المتغيرات المستقلة فى معادلة الإنحدار وقد يكون الإرتباط الذاتى فى بعض الأحيان راجعاً إلى الإرتباط السلسلى للمتغيرات المستقلة خلال هذا المدى، مع العلم أن عناصر الخطأ لا ترجع إلى الإرتباط الذاتى، وإذا فرضنا أن (X) تتبع عمليات الإنحدار. المزدوج فى المعادلة الآتية:

$$Xt = rXt\text{-}1 + Wt$$

حيث أن:

$0 \leq r < 1$ ، Wt تشير إلى المتغير العشوائى غير المرتبط

وبعد إجراء بعض الإضافات، فإنه ليس من الصعب إيضاح أن نعرض Dw كما يلى:-

$$Dw \approx 2 - 2\frac{Cov(e_t, et_{-1}) + r(\beta - \hat{\beta})^2 Var(X_t)}{Var(et) + r(\beta - \hat{\beta})^2 Var(X_t)}$$

فغنى المعادلة السابقة نلاحظ أنه كلما انخفضت قيمة r كلما ازدادت (Dw) وكذلك عندما تؤول قيمة r إلى الواحد فإن Dw تقترب من الصفر حتى لو كانت شروط الخطأ غير مرتبطة ذاتياً.

ويلاحظ من الناحية العلمية أن قيم X تميل إلى الإرتباط عند العمل ببيانات السلاسل الزمنية وبالتالى فإن القيمة النهائية لـ dL ربما تكون أكبر من 2.

مثال تطبيقى معدلات الفائدة Interest rates

نفترض أننا نحاول صياغة نموذج ذو معادلة واحدة لتفسير معدل التغير فى الثروة كدالة للإنتاج الصناعى والمعروض من النقود وكذلك معدلات التغير فى المستوى العام للأسعار.

ونعبر عن حركة معدل الثروة النقدية بالرمز R_1 والإنتاج الصناعى IPt والمعروض النقدى Mt كذلك التغير فى المستوى العام للأسعار Pus M_t وهو يساوى:

$$PUSM_t = \Delta P_t/P_t + \Delta P_{t-1}/P_{t-1} + \Delta P_{t-2}/P_{t-2}$$

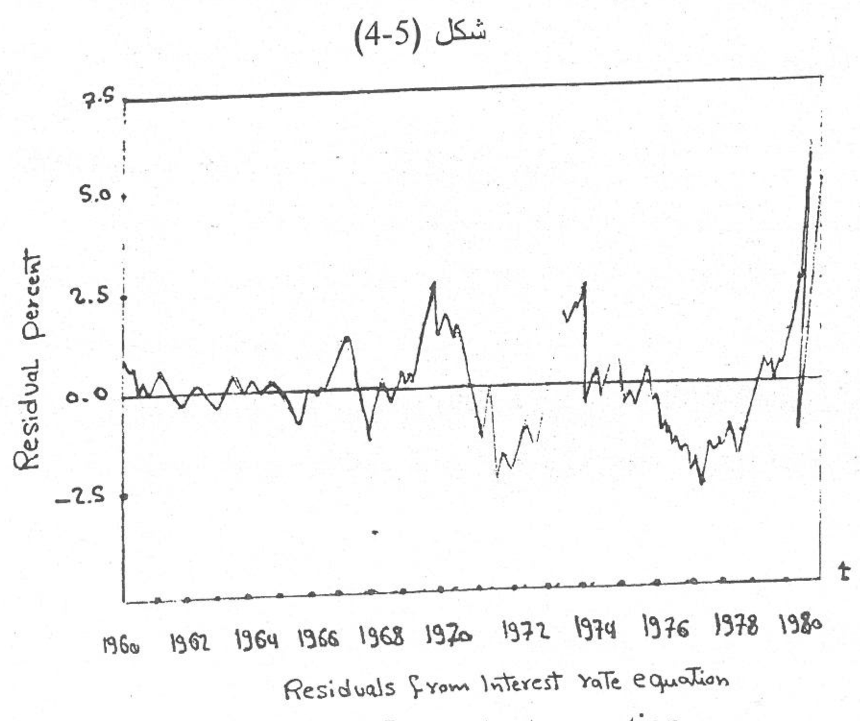
مأخوذ لفترة مقدارها 3 شهور وبالرجوع إلى المعادلة المقدرة نجد الآتى:

$$\hat{R}_t = -2.475 + 0.0979IP_t - 0.0769M_t + 29.286PUSM_t$$
$$(-5.303) \quad (14.16) \quad (-2.39) \quad (4.14)$$

$R^2 = 0.69$ S=1.3377 DW=0.18

وبما أن قيمة Dw=0.18 إذن هناك إرتباط ذاتى موجب من الدرجة الأولى، هذا الارتباط السلسلى يمكن إيضاحه من خلال الشكل الآتى الذى يوضح أن بواقى الإنحدار إرتباط مرتفع

شكل (4-5)



Residuals from Interest rate equation

فعندما يكون الباقى موجباً أثناء فترة زمنية معينة فإنه يظل كما هو فى الفترة القادمة. وكذلك عندما يكون هذا الباقى سالباً فى فترة ما فإنه يظل أيضاً كما هو فى الفترة التى تليها، ويمكن القول أنه عندما تنقلب البواقى لتصبح سالبة فى فترة وموجبة فى الفترة التى تليها فإن ذلك يؤدى إلى وجود بعض الإرتباك فى عملية التنبؤ ويلاحظ ذلك من خلال الفترة 76 وحتى 80.

وعموما إذا لم توجد السبل الكفيلة بعلاج هذه الحالة، فالمعلمات المقدرة تكون غير كفء، وحتى نقوم بتحسين النتائج، فإنه من الممكن إعادة تقدير معادلة الفائدة بإستخدام طريقة Cochrone-orcutt والنتائج كانت كالاتى:

$$\hat{R}_t = -15.729 + 0.557IP_t - 0.0235M_t + 5.579PSuM_t$$

وفى الواقع نلاحظ أن قيمة (t) الإحصائية منخفضة بعض الشئ، لكن هذه القيمة هى قيمتها الحقيقية فعلاً، وأخيراً يمكن القول أن قيمة (Dw) للمقدار 1.45 تكون أقل من 2 وهذا فى حد ذاته يقترح وضع صيغ أخرى أكثر تعقيداً للتعبير عن الإرتباط بين البواقى.

إختبار الإرتباط الذاتى عندما يوجد إبطاء بالمتغير التابع

Testing for Auto Correlation when there is alagged dependent variable

فعندما يوجد لدينا واحداً أو أكثر من المتغيرات الداخلية المبطأة Lagged endogenous variable فإن قيمة Dw تقترب من 2 عندما تكون الأخطاء مرتبطة ذاتيا.

وهذا يعنى أن (Dw) تمدنا بمؤشر للإرتباط الخطى عندما تكون قيمتها منخفضة، وهناك إختبار بديل آخر أكثر سهولة قام دربن Durbn بتقديمه لنا وهو يصلح للعينات الكبيرة والصغيرة على حد سواء ولبيان كيفية إجرائه عمليا، نفترض تقدير المعادلة الآتية بإستخدام طريقة المربعات الصغرى المعتادة.

$$Yt = \alpha + \beta Y_{t-1} + YX_t + \mu_t$$

والإختبارات الإحصائى المستخدم هو إحصائية دربن المسماه بـ h وتعرف كالآتى:-

$$h = \hat{m}\sqrt{\frac{T}{1 - T[Var(\hat{\beta})]}}$$

ويلاحظ أن $Var(\hat{\beta})$ يقدر على أنها مربع الإخطاء المعيارية لمعامل المتغير المبطئ الداخلى، أما (T) فهى عدد المشاهدات و$(\hat{m})$ هى معامل الإرتباط السلسلى المقدر من الدرجة الأولى ويلاحظ أن قيمة $(\hat{m})$ يمكن الحصول عليها مباشرة من القيمة التالية حيث أن:

$$Dw \approx 2(1-\hat{m})$$

وبالتعويض عن ذلك فى المعادلة السابقة نحصل على ...

$$h = (1 - \frac{Dw}{2})\sqrt{\frac{T}{1 - T[Var(\beta)]}}$$

وطالما أن دربن قد بين أن قيمة (h) الإحصائية تتوزع توزيعاً طبيعيا مع وحدة التباين، فإن الإختبار الأولى للإرتباط الذاتى يمكن عمله مباشرة بإستخدام جدول التوزيع الطبيعى.

ومن الضرورى ملاحظة أن اختبار h يكون غير ملائم عندما تكون القيمة $1 < T\,\text{var}(\hat{\beta})$. ولا يمكن أخذ الجذر التربيعى للمقدار السالب، وفى هذه الحالة يقترح دربن اختبار آخر ربما يكون أكثر تعقيداً وفيه نحصل على بواقى المتغير $\hat{e}_t$ من انحدار المربعات الصغرى المعتادة ثم نقوم بتكوين البواقى المبطأة للمتغير $\hat{e}_{t-1}$ مع إهمال المشاهدة الأولى للتبسيط بالتالى فإن المعادلة المقدرة:

$$\hat{e}_t = \alpha + \beta + m^{*}\hat{e}_{t-1} + \beta^{*}\hat{e}_{t-1} + Y^{*}X_t + \mu_t$$

والآن يمكن إجراء اختبار (t) للفرض العدمى الذى يعنى أن قيمة (m^*) تكون غير معنوية ولا تختلف عن الصفر، فإذا رفضنا الفرض العدمى فإننا نستنتج وجود إرتباط ذاتى من الدرجة الأولى ...وعندما يكون هناك إرتباط ذاتى معنوى فى ظل وجود المتغير التابع المبطئ فإن تقدير المعلمة يصبلح غاية فى الصعوبة طالما أن تقدير المربعات الصغرى فى هذه الحالة سوف يعطينا نتائج متحيزة.

مثال تطبيقى الإستهلاك الكلى Aggregate Consumption

قمنا بتقدير نموذج لدالة الإستهلاك الكلى الديناميكية و رمزنا على الإستهلاك بالرمز (C) "الإستهلاك الجارى" وهو دالة فى الإستهلاك المبطئ الربع سنوى C-1 والدخل الممكن التصرف فيه Y0، ولقد كانت المعادلة المقدرة بطريقة المربعات الصغرى بإستخدام بيانات ربع سنوية فى الفترة من 1959 حتى الربع الأول من 1988 وهى كما يلى:

$$Ct=1.747 + 0.0988yDt + 0.08974C_{t-1},\ Dw=1,5594$$
$$(0.364) \quad (0.0399) \quad (0.04335)$$
$$R^2=0.999$$

ولإختبار الإرتباط الذاتى نستخدم إحصائية دربن (h)، وطالما أن التباين الخاص بمعامل المتغير المبطئ التابع يكون 0.04335 وقيمة Dw=1.55941 وكذلك قيمة T=117.

ومن ثم يمكن حساب قيمة (h):

$$h=\left[1-\frac{1.5594}{2}\right]\left[\frac{117}{1-(117)(0.04335)}\right]^{0.5}=2.7$$

وحيث أن 2.7 < القيمة الجدولية للتوزيع الطبيعى عند مستوى معنوية 5% فإننا نرفض الفرض العدمى الذى يقرر عدم إرتباط ذاتى، ونتيجة لـذلك يكون من الواجب محاولة تصحيح النموذج وذلك بعلاج مشكلة الإرتباط الذاتى بصورة ملائمة.

3/5- الإرتباط بين المتغير المستقل والخطأ العشوائى

Correlation between and independent variable and the Error Term:

فى الحقيقة يمكن ملاحظة الصعوبات الناتجة من وجود إرتباط بـين المتغير المستقل والخطأ العشوائى عند تناول نموذج مكون من متغيرين وتقاس هذه المتغيرات على شكل إنحرافات حيث أن:-

$$xi=(Xi-\bar{X})$$

$$yi=(yi-\bar{Y})$$

بالتالى فإن:

$$\hat{\beta}=\frac{\sum xiyi}{\sum xi^2}$$

حيث أن

$$yi=\beta xi+\mu i)$$

وبالتعويض عن قيمة yi

$$\hat{\beta} = \frac{\sum xi(\beta xi + \mu i)}{\sum xi^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\beta \sum xi^2 + \sum xi\mu i)}{\sum xi^2} = \beta + \frac{\sum xi\mu i}{\sum xi^2} \qquad (6-1)$$

ويلاحظ أن $\hat{\beta}$ تكون تقدير غير متحيز للمعلمة β إذا كانت مفردات المتغير X ثابتة فى العينات المختلفة، وهذا الفرض يعتمد بشدة على أن العلاقة بين xi، ei معندمة تماماً. بمعنى أن التغاير بينهما يساوى الصفر، ولكن فى هذه الحالة كون المتغير x غير ثابت أى عشوائى فإن القول بأن β هى تقدير غير متحيز هو قول غير صحيح.

ويلاحظ أنه يقال على التقديرات أنها متسقة إذا كانت قيمة $\hat{\beta}$ المقدرة تؤول إلى قيمة β عندما يكبر حجم العينة أى أن $\hat{\beta} = \beta$

كذلك فإن:

$$E(\hat{\beta}) = \beta + E\left(\frac{\sum xi\mu i}{\sum xi^2}\right)$$

فإذا كان:

$$Cov(xi, ei) \neq 0$$

فإن:

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

وفى حالتنا هذه إذا أردنا إثبات أن $E(\hat{\beta}) = \beta$ فإنه يجب التحقق من أن $\sum xi\mu i = 0$ وذلك عندما يكبر حجم العينة.

وفى الواقع عندما تكون μi مرتبط xi فإنه ليس هناك ما يضمن أن قيمة β سوف تساوى $\hat{\beta}$ فالمقدار $\frac{\sum xi\mu i}{\sum xi^2}$ قد يكون موجباً، بالتالى فإن قيمة $\hat{\beta}$ سوف تزيد عن قيمة β بغض النظر عن حجم العينة.

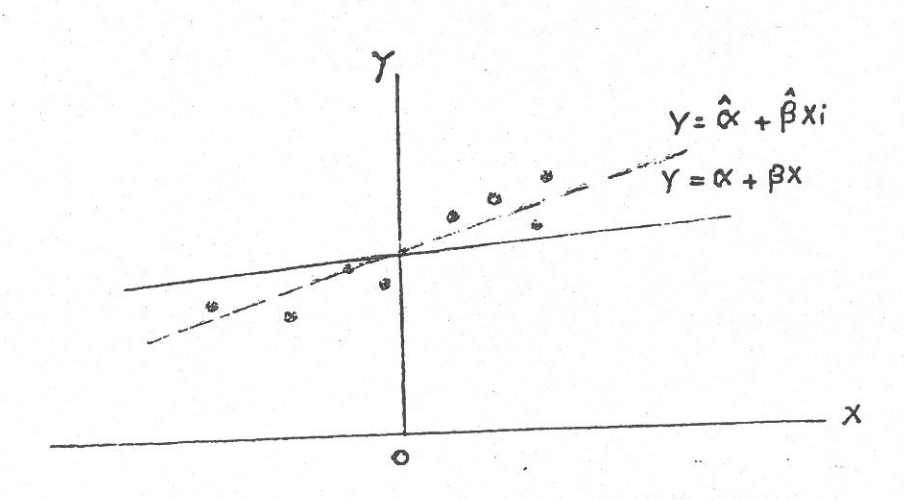
وهذا يعنى أن الإرتباط بين المتغير المستقل والخطأ العشوائى يقود إلى غياب خاصية الاتساق عند تقدير المعلمات بطريقة المربعات الصغرى المعتادة.

ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل التالى حيث يعبر الخط المتصل عن خط الإنحدار الحقيقى بنما يمثل الخط المتقطع المقدر أى خط إنحدار المربعات الصغرى العادية.

شكل رقم (5-5)

الإرتباط بين المتغير المستقل والخطأ العشوائى

Correlation between X and μi



ونلاحظ من الشكل أن المربعات الصغرى المعتادة قد فشلت فى توفير معلمات غير متحيزة ومتسقة وذلك لأن معامل الإنحدار يكون مقدراً بأكبر من قيمته الحقيقة.

حيث:

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum xi\mu i}{\sum xi^2}$$

1/3/5ـ الأخطاء فى المتغيرات Errors in variables

من الملاحظ أننا افترضنا فى التحليل السابق أن كل المتغيرات المستخدمة فى أسلوب حساب الإنحدار قد قيست دون وجود أخطاء بها، لكن إذا نظرنا بشكل أكثر واقعية سنجد أن أخطاء القياس تحدث غالباً، والتى قد تؤدى إلى تغير خصائص معلمات الإنحدار المقدرة.

أولا: حالة وجود اخطاء بالمتغير التابع (Y)

تشير الأخطاء فى المتغيرات إلى الحالة التى تحتوى فيها متغيرات الإنحدار على أخطاء فى القياس، فأخطاء القياس فى المتغير التابع تدخل فى حد التشويش ولا تخلق أى مشكلة. لكن الأخطاء فى المتغيرات المفسرة تؤدى إلى تقديرات للمعالم متحيزة وغير متسقة.

بفرض أن نموذج الإنحدار الحقيقى هو

$$Yi=\beta xi + \mu i$$

حيث μi هو الخطأ العشوائى الذى يمثل تأثير المتغيرات المهملة علاوة على أن المتغير yi ينتج من عملية القياس $yi^*=yi+vi$ عندما يكون $Cov(\mu i, Xi)=0$.

ومن هنا فإن y^* هو المتغير التابع الذى سوف يجرى من خلاله تقدير معالم النموذج. ويمكن كتابة المعادلة السابقة فى الشكل التالى:

$$Y^*=\beta xi+(\mu i+vi)$$

بعد إضافة خطأ القياس Vi إلى الطرفين ويلاحظ أنه لو كانت قيمة Vi لها قيمة متوسطة لا تساوى الصفر، فإن الإنحدار المقدر يتطلب وجود مقدار ثابت يعبر عن القيمة المتوسطة للخطأ vi كما فى المعادلة السابقة. وبشكل عام يلاحظ أن وجود خطأ القياس فى المتغير التابع يؤدى إلى زيادة تباين الخطأ وهذه الزيادة يمكن حسابها وبالتالى يمكن تقدير تباين الباقى وكل المختبرات الإحصائية أيضا.

ثانيا: حالة وجود أخطاء بالمتغير المستقل (X).

افترض أن:

$$xi^*=xi+vi$$

حيث أن xi^* هى القيمة المشاهدة، Xi هى قيمة x الحقيقية ويكون نموذج الإنحدار الحقيقى هو $yi=\beta xi+\mu i$ بينما نموذج الإنحدار الفعلى هو

$$yi = \beta(xi^* - vi) + \mu i$$

$$yi = \beta xi^* - \beta vi + \mu i$$

$$yi = \beta xi^* + (\mu i - \beta vi)$$

$$yi = \beta xi^* - \mu i^*$$

ويمكن أن نلاحظ أن:

$$Cov(\mu i^*, xi^*) = E([\mu i - \beta vi][xi + vi]$$

$$= E(\mu iXi + \mu ivi - \beta XiVi - \beta vi)^2$$

$$= 0 + 0 - 0 - \beta\sigma^2_\mu$$

$$= -\beta\sigma^2_\mu$$

ومن هنا فإن معلمات الإنحدار سوف تكون متحيزة وغير متسقة كما أن درجة التحيز وعدم الاتساق تكون مرتبطة بالتباين فى خطأ القياس (vi) فكلما إرتفع هذا التباين ازدادت درجة التحيز وعدم الاتساق.

ثالثاً: حالة وجود أخطاء قياس فى كلا من (y, x)

ففى الحالتين السابقتين كانت الفروض كالتالى:

$$Yi^* = yi + Vyi \qquad Vyi \sim N(0, \sigma^2_{vx})$$

$$Yi^* = yi + Vyi \qquad Vyi \sim N(0, \sigma^2_{vx})$$

وبفرض أن:

$$yi = \beta xi$$

ومن كلا من Vxi, Vyi غير مرتبطين مع بعضهما البعض وغير مرتبطين أيضا بـ Xi كذلك كل خطأ غير مرتبط ذاتيا ومن ثم تكتب معادلة الإنحدار المقدرة كالتالى:

ونظرا لأن:

$$Yi^* = \beta^* x_i + (V_{yi} - V_{xi})$$

$$yi^* = \beta xi$$

$$yi^* = \beta xi + Vyi$$

$$xi = xi^* - Vxi$$

$$yi^* = \beta(xi^* - Vxi) + Vyi$$

$$yi^* = \beta xi - \beta vxi + Vyi$$

إذن:

$$yi^* = \beta xi + (Vyi - \beta xi)$$

وبتقدير $\hat{\beta}$ بطريقة المربعات الصغرى العادية

$$\hat{\beta} = \frac{\sum xi^* \, yi^*}{\sum x_i^2} = \frac{\sum (xi + vxi)(yi + Vyi)}{\sum (Xi + Vxi)^2}$$

ونظراُ لأن كل من Vyi، Vxi متغيرات عشوائية، فليس من السهل تقدير تحيز β وذلك لأن القيمة المتوقعة للنسبة بين متغيرين عشوائيين لا تساوى نسبة القيم المتوقعة للمتغيرين، ومع ذلك فإنه يمكن أن نقدر عدم اتساق β تقدير عن طريق تقدير $\hat{\beta}$ عندما يؤول حجم العينة إلى عدد كبير،وسوف نرمز لهذا بالرمز plim ولأن Vxi, Vyi قيم غير مرتبطة مع بعضها البعض كلا منهما غير مرتبط مع Xi فأحد طرق التقدير تكون...

$$p\lim = p\lim + \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2 + \sum Vx_i^2}$$

$$= p\lim + \frac{\beta Var(Xi)}{Var(Xi) + Var(VXi)}$$

وبالقسمة على Var(xi)

إذن:

$$p\lim\hat{\beta} = \frac{\beta}{1 + \sigma_v^2 / Var(Xi)}$$

ونلاحظ مما سبق أنه كلما زاد تباين x وتباين Vxi زاد عدم اتساق β، ويلاحظ مع وجود خطأ التقدير فى المعادلة فإنه يؤدى إلى عدم تقدير المعلمات الحقيقية للإنحدار عند استخدام طريقة المربعات الصغرى المعتادة.

2/3/5 – تقديرات المساعدة ((الوسيطة))

Instrumental – Variables Estimation

وهى المتغيرات التى تحل محل المتغيرات المستقلة التى ترتبط بالخطأ العشوائى، وكذلك فهى مناسبة للتعامل مع الأخطاء فى المتغيرات، فالأسلوب المسمى بالمتغيرات المساعدة هو أحد الأساليب التى يمكن استخدامها لحل مشكلة خطأ القياس، الأمر الذى يتضمن البحث عن متغير جديد هو Z يكون مرتبط إرتباطاً كبيراً بالمتغير المستقل x وفى نفس الوقت غير مرتبط بحد الخطأ فى المعادلة وكذلك غير مرتبط بأخطاء القياس للمتغيرين x,y ومن ثم فالمتغير الوسيط يجب أن يتوافر فيه شرطين أساسيين:–

(1) أن الإرتباط بين Z وكلا من $Vxi, Vyi, \mu I$ يقترب من الصفر عندما يؤول حجم العينة إلى الكبر.

(2) الإرتباط بين x, z ليس صفريا عندما يؤول حجم العينة إلى الكبر وحيث أن المتغير الوسيط مرتبط بشدة مع المتغير x وبفرض وجود الحالة الثانية سابقة الذكر إذا كان ...

$$x^* = x + Vxi$$
$$yi = \beta xi + \mu i$$

فإن:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum YiZi}{\sum xi^* Zi}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum zi(\beta xi^* + \mu i)}{\sum xi^* Zi} = \frac{\beta \sum zixi^* + \sum zi\mu i^*)}{\sum xi^* Zi}$$

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum zi\mu}{\sum xi^* Zi}$$

ونلاحظ هنا أنه عند اختيار Z غير وسيط فإن β^* سوف نقترب من β عندما يؤول حجم العينة للكبر وذلك لأن $(\sum Zi\mu i)$ نقترب من الصفر، حيث أن μ, z غير مرتبطين ومن ثم سيكون لدينا تقدير متسق لـــ β.

تعين الخطأ "تحديدة" Specification Error

إن تحديد النموذج بشكل صحيح يترتب عليه عدة أمور غاية فى الأهمية، إذ أنه يحدد مدى دقة المعلمات المقدرة، وكذلك نموذج التقدير ونموذج الإختيار، وفى الحقيقة لا يمكن من الناحية الواقعية وجود نموذج صحيح تماماً من كل الأخطاء إلا أن الباحثين يحاولون اختيار أفضل النماذج

الممكنة عن طريق محاولة تجريب أكثر من نموذج محتمل للتعبير عن الظاهرة موضع الدراسة. إلا أن القيام بذلك يحتاج إلى جهد كبير علاوة على ذلك فهو يحتاج أيضا إلى قدر كبير من الأموال فهى فى الواقع عملية مكلفة.

ويلاحظ أن المشكلة الرئيسية المرتبطة بالنموذج هى هل تم تعيين هذا النموذج بصورة صحيحة أما لا أى مشكلة Specification or misspecification وهنا نكون بصدد نوعين من عدم التحديد أو التعيين وثيقة الصلة بالنموذج.

أولا: يحدث عند نسيان بعض المتغيرات.

ثانيا: يحدث عندما يضاف متغيرات غير وثيقة الصلة بالنموذج.

وسوف يتم مناقشة هذه النقاط فى الفقرتين الآتيتين وسوف نتوقف فى مناقشتنا للتعرف على مشاكل النموذج بمشكلة عدم اختيار العلاقة الدالية الملائمة للتعبير عنه.

المتغيرات المحذوفة او المهملة omitted Variables

بفرض أن النموذج الحقيقى معطى بالمعادلة

$$Yi= \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{i3} + \mu i$$

بينما نموذج الإنحدار المقدر

$$\hat{Y}i= \beta^*_{2i} + \mu i^*$$

حيث أن

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{\sum x_{2i} y_i}{\sum x_{2i}^2}$$

وبإحلال قيمة yi فى المعادلة الأولى فإن

$$\dot{\beta}_2 = \frac{\sum x_{2i}(\beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{2i} + \mu i)}{\sum x_{2i}^2}$$

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{\sum(\beta_2 x_{2i}^{\ 2} + \beta_3 x_{2i} + x_{2i}\mu i)}{\sum x_{2i}^2}$$

$$\hat{\beta}_2^* = \beta_2 + \frac{\beta_3 \sum x_{3i} x_{2i}}{\sum x_{2i}^2} + \frac{\beta_3 \sum x_{2i} \mu i}{\sum x_{2i}^2}$$

ولأن x_2 ثابت، $E(\mu)=0$ لذلك فإن الحد الأخير توقعه =0

$$E(\hat{\beta}_2^*) = \beta_2 + \beta_3 \frac{\sum x_{2i} x_{31}}{\sum x_{2i}^2} = \beta_2 + \beta_3 E\left(\frac{\sum x_{2i} x_{3i}}{\sum x_{2i}^2}\right)$$

$$E(\hat{\beta}_2^*) = \beta_2 + \beta_3 \frac{Cov(X_2, X_3)}{Var x_2}$$

إذا تقدير إنحدار المربعات الصغرى المعادلة السابقة تقدير لمعلمة الإنحدار (β_2) وسوف تختفى حالة التحيز هذه عندما يكون تغاير x_2, x_3 =0 صفر أى أن $[Cov(x_2, x_3)=0]$ وذلك عندما تكون قيمة x_3, x_2 غير مرتبطين فى العينة. وعندما يكون المتغير المحذوف غير مرتبط مع جميع المتغيرات المستقلة التى يشملها النموذج، فإن التحيز سوف يختفى. أما إذا كان المتغيران x3, x2 بينهما إرتباط فإن معامل x2 سوف يشتمل على أثر المتغير x3، وبالتالى يكون متحيز، أما إذا كان المتغيران x3, x2 غير مرتبطان، فإن حذف x3 سوف يجعل معامل x2 لا يتأثر بـــ x3 وبالتالى لا يكون متحيزاً. وبالنسبة لتأثير حذف متغير على تباين β وتقديره، فإنه يمكن القول أن:

- فى حالة عدم ارتباط x3, x2 فإن معامل $\hat{\beta}_2^*$,سوف يكون تباينها مماثل لتباين $\hat{\beta}_2$.
- وعندما يكونا x3, x2 مرتبطين، فإن التباينات بين $\hat{\beta}_2^*$ ، $\hat{\beta}_2$ تكون غير متماثلة وبالتالى فإن التباين الفعلى لـ $\hat{\beta}_2^*$ يكون أقل من التباين الفعلى لـ $\hat{\beta}_2$.

وجود متغير غير مناسب

بفرض أن النموذج الحقيقى معطى كالآتى:

$$Yi= \beta_2 x_{2i} + \mu i$$

فى حين أن نموذج الإنحدار يعطى عن طريق المعادلة الآتية ...

$$Yi= \beta_2^* x_{2i} + \beta_{3i}^* + \mu i$$

ويمكن القول أن الآثار الناتجة عن إضافة متغير غير مناسب تختلف تماماً عن الآثار الناتجة عن المتغير المحذوف، بإضافة متغير غير مناسب x3 مثلاً، فهذا دليل على أننا لا نأخذ فى الاعتبارات أن $\hat{\beta}_3^* = 0$.

وعند حساب تقدير معامل x2 أى β_2^* فى المعادلة السابقة نحصل على:-

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{\sum (x_{3i})^2 (\sum x_{2i} y_i) - (\sum x_{2i} X_{3i})(\sum X_{3i} y_i)}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

وبإحلال yi من المعادلة الأولى والتعويض بها فى المعادلة الأخيرة نحصل على

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{\sum x_{3i}^2 \sum x_{2i}(\beta_2 x_{2i} + \mu i) - \sum x_{2i} x_{3i} (\sum x_{3i})(\beta_2 x_{2i} + \mu i)}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{\beta_2 \sum x_{2i}^2 x_{3i}^2 + \sum x_{3i}^2 (\sum x_{2i} \mu_{3i}) - \beta_2 (\sum x_{2i} x_{3i}) 2 + (\sum x_{3i} x_{3i})(\sum x_{3i} \mu_i)}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

$$\hat{\beta}_2^* = \beta_2 + \frac{(\sum x_{3i}^2)(\sum x_{2i} \mu i) - (\sum x_{2i} x_{3i})(\sum x_{3i} \mu i)}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

وحيث أن توقع كل من X3, X2 يساوى مقدار ثابت إذن:

$$E(\hat{\beta}_2^*) = \beta_2$$

أى أن إدخال متغير غير مناسب لا يؤثر على تقديرات معلمة الإنحدار لكن تباين معامل الإنحدار المقدر $\hat{\beta}_2$ > تباين المعامل $\hat{\beta}_2$.

4/5 ـ عدم الخطية Nonlinearties

هناك خطأ آخر ممكن حدوثه، عندما يختار الباحث نموذج الإنحدار الخطى للتعبير عن الظاهرة موضع الدراسة على الرغم من صعوبة تناولها فى شكل نموذج خطى، فاستخدام نموذج بسيط مثل النموذج

$$Yi = \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{2i}^2 + \beta_4 X_{2i}^3 + \mu i$$

حيث يكون أكثر دلالة فى التعبير عن الظاهرة وعلى الرغم من أنه غير خطى إلا أنه يمكن تحويله إلى الصورة الخطية وذلك كما فى النموذج الآتى:

$$Yi=\beta^*{}_2x_{2i} + \mu^*i$$

إذ أن توصيف النموذج فى شكل علاقة خطية عندما يكون الشكل الخطى غير مناسب للظاهرة سوف يؤدى إلى تحيز وعدم اتساق التقدير.

1/4/5 ـ الكفاءة مقابل التحيز فى بناء النموذج:

وهنا نقول أن إضافة أحد المتغيرات إلى النموذج أو القيام بحذف أحد المتغيرات أمراً يجب أن يكون محسوبا بدقة، بحيث أننا لا نضيف إلى النموذج إلا المتغيرات التى لها أهمية فى تفسير الظاهرة، فلا يجب أن توجد متغيرات لا فائدة من وضعها فى النموذج، كذلك فإن إهمال أحد المتغيرات يجب أن يتم بعد التأكد من عدم أهمية هذا المتغير فى التفسير ويلاحظ أن القيام بهذه العملية يكون لها تكلفة يتحملها النموذج وتتمثل فى التحيز وعدم الاتساق "إذا لم يتم مراعاة هذه النقطة بشكل كاف"

وبشكل عام يراعى اختيار النموذج دائما بالشروط المعروفة وهى شروط الكفاءة علاوة على أن الهدف من بناء النموذج أو الهدف من البحث هو موضوع يمثل أهمية فى عملية اختيار النموذج.

فلو كانت التوقعات الجارية هى الهدف .. فإن تخفيض متوسط مربع الخطأ يكون أمراً منطقياُ... ومن هنا فإن القيام بتقدير نماذج بديلة خلال فترة زمنية معينة ومقارنة متوسط مجموع مربعات الأخطاء لهذه النماذج سوف يحكم عملية الاختيار.

ويلاحظ أن استخدام المختبرات الاحصائية مثل (t) ، (F) لا يتم إلا بعد القيام بتحديد النموذج وتوصيفه. فيمكن استخدام المختبر (t) بغرض تحديد مدى وثاقة الصلة بين متغيرين فى نفس الوقت الذى يمكنه فيه استخدام

المختبر (F) لبحث ذلك بالنسبة للعديد من المتغيرات. أما فى حالة عدم التحديد الجيد للنموذج وإهمال الكثير من المتغيرات فإن هذه المختبرات الإحصائية، لن تعطينا نتائج مقبولة من هذا النموذج المقدر ...

مثال تطبيقى لتقدير الطلب على النقود

فى دراسة خاصة لتقدير دالة الطلب على النقود فى الآجلين القصير والطويل وأسفرت عملية التقدير عن معادلة الطلب المقدرة الآتية:

$$\hat{M}_T = 0.1365 + 1.069Ypt - 0.01321yt - 0.747Rt$$

$$R^2 = 0.9965 \quad (0.148) \qquad (0.13897) \quad (0.0540)$$

ويلاحظ أن البيانات ربع سنوية.وتشير الرموز إلى:-

Mt هى اللوغاريتم الطبيعى للأصول المالية الكلية.

Yp_T هى اللوغاريتم الطبيعى لمعلمة الدخل الدائم.

Y_T هى اللوغاريتم الطبيعى للدخل الجارى

R_T هى اللوغاريتم الطبيعى لمعدل الفائدة.

وحيث أن معادلة الطلب على النقود هنا فى الأجل الطويل، من ثم يمكن استنتاج أن معلمة الدخل الدائم تكون أكثر أهمية من معلمة الدخل الجارى ... والواقع أن المعادلة المقدرة قد يوجد بها نقص ناتج عن إهمال بعض المتغيرات، بالتالى يكون التحديد الأفضل لها ممثلا فى المعادلة التالية:-

$$Mt = \beta_1 + \beta_2 yp_T + \beta_3 Y_t + \beta_4 R_t + \beta_5 M_{t-1} + \mu i$$

فلو كانت هذه المعادلة صحيحة فعلاً ومطابقة للواقع إلى حد كبير، فإنه يمكن لنا معرفة التحيز الذى حدث بالنسبة للمعادلة الأولى بإستخدام النتائج السابقة عن تأثير المتغيرات المهملة وهى التى تحدد الخطأ، ومع افتراض تقدير معلمة الدخل الدائم، فإنه يمكن إعادة تصحيح النموذج الأصلى حيث يصبح:

$$M_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_{pt} + \alpha M_{t-1} + \mu_t$$

إذن فاستخدام المعادلة

$$E(\hat{\beta}_2^*) = \beta_2 + \beta_3 \frac{Cov(X_2, X_3)}{Varx_2}$$

سوف يقودنا إلى استنتاج أن التحيز فى المعلمة المقدرة $\hat{\alpha}_2$ فى المعادلة

$$M_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_{pt}$$

سوف يكون:

$$E(\hat{\alpha}_2) - \alpha_2 = \alpha_3 \frac{Cov(Yp_t, M_{t-1})}{Var(Yp_t)}$$

وسوف نتوسع فى مناقشة هذه النقطة بعد ذلك عندما نستخدم عدد من المعادلات، وعدد من المتغيرات التفسيرية للتعبير عن الظاهرة فى الطبعة القادمة إنشاء الله ·

وفى هذه الحالة فإن التحيز فى معلمة الدخل الجارى تقدر بواسطة

$$E(\hat{\beta}_2) - \beta = \beta_S d_2$$

حيث أن d_2 هى معامل yp_t فى الإنحدار الخاص بـ Mt-1 على Ypt ، Yt ، Rt وهو كالآتى:

$$M_{t-1} = d_1 + d_2Yp_t + d_3Y_t + d_4R_t + V_t$$

وهنا يلاحظ أنه طالما كانت M_{t-1} تشتمل على فترة زمنية واحدة للمتغير الحالى وحيث أن M_{t-1}، Yp_t معلوم مدى إرتباطهما الكبير، لذا فإننا نتوقع أن إشارة M_{t-1} سوف تكون موجبة أى أنه عندما يكون الإرتباط محدد فإنه يمكن التنبؤ بأن التحيز سوف يكون موجب القيمة.

ولعل ذلك يرجع إلى إعطاء أهمية كبيرة مبالغ فيها للدخل الدائم، وإهمال بعض المتغيرات مما يؤدى إلى وجود خطأ فى تعيين النموذج، والنتيجة سوف تكون

$$\hat{M}_t = 0.3067 + 0.06158Yp_t + 0.03274Y_t - 0.3325R_t + 0.5878M_{t-1}$$
$$(.14284) \quad (0.0940) \quad (0.0597) \quad (0.0669$$

ومن الواضح أن معامل M_{t-1} موجباً و ذو دلالة معنوية فى حين أن معامل Yp_t على الرغم من كونه موجب إلا أنه غير معنوى عند مستوى معنوية 5%.

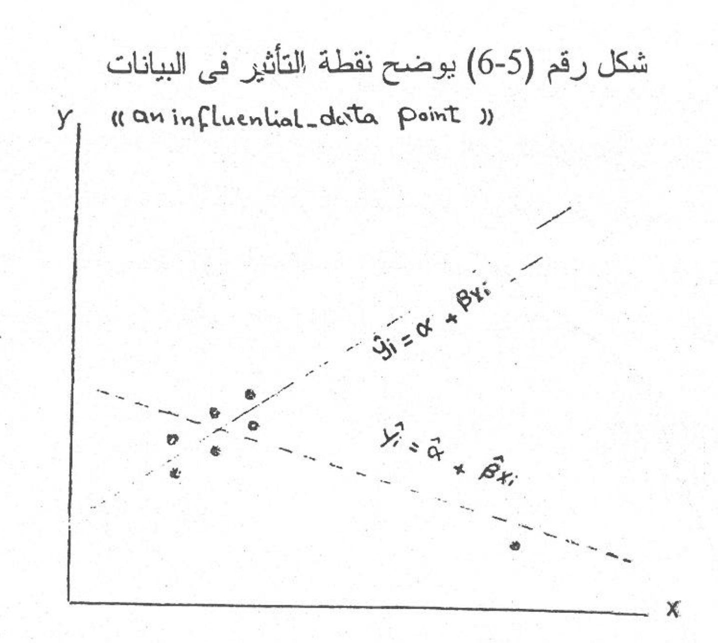
ولذا فإن الإستنتاج الأولى الذى يجب ملاحظته هنا هو:

- إن تحديد الدخل الجارى يعد أكثر أهمية من الدخل الثابت "الدائم"، فى تفسير الطلب على النقود.

2/4/5 ـ تشخيص الإنحدار Regression diagnostics

إن نموذج الإنحدار الخطى قد يكون عرضة للعديد من الأخطاء الممكنة، علاوة على أن وجود هذه المشاكل مثل مشكلة عدم ثبات التباين يؤدى إلى عدم كفاءة أدوات التقدير المستخدمة. وفى الواقع إن معرفة واكتشاف تأثير المشاهدات المتطرفة فى البيانات علاوة على تأثير المتغيرات المهملة على النموذج، قد تكون مسألة صعبة ويمكن محاولة استبيان ذلك منه خلال الشكل (6-2)، وفيه نلاحظ نموذج الإنحدار الحقيقى ذو الميل الموجب والمعطى بالمعادلة $yi=\alpha+\beta xi+\mu I$ أما النموذج المقدر الخطى فهو سالب الميل وربما يرجع ذلك إلى شدة تأثيرها هذه البيانات الأكثر تطرفاً، وعلى العموم فيمكن محاولة التغلب على مثل هذه المشكلة بالعديد من المقترحات والتى تفيد فى التنبؤ بمدى تأثيره هذه البيانات أو المتغيرات المهملة أو حتى المساعدة.

شكل رقم (6-5) يوضح نقطة التأثير فى البيانات



بواقى ستيودنتيزد Studenlized residuals

ففى الواقع يمكن استخدام قيمة الباقى، عند فحص نموذج معين إذ أنه يكون مفيد لأكثر من سبب، أولها أنه يستطيع أن يخلصنا من المشاهدات المتطرفة والتى ربما تفيد فى صحة النموذج، وثانيا يمكن عن طريقة تقييم الفروض الخاصة بتوزيع الخطأ ... وعلى الرغم من ذلك فإنه يمكن أن يكون إستخدام الباقى كأداة تشخيصية تكون محدودة، وذلك قد يرجع إلى أن تأثير البيانات يمكن أن يتوافق مع الباقى، ويكونان معاً من علاقات الإرتباط ولهذا السبب يكون من المفيد غالبا افتراض تعلق قيمة الباقى بكل مشاهدة على حدة عندما يتم تقدير نموذج الإنحدار..

ومن هنا فإنه يمكن افتراض أن $\beta(i)$ تمثل الإنحدار المقدر عندما كانت (i) هى رقم المشاهدة والباقى سوف يكون e_i وهو يساوى

$$ei = yi - \beta ixi$$

ويلاحظ ان توقع هذه البواقى سوف يتبع التوزيع الطبيعى كذلك فإن المتوسط الخاص بها يساوى الصفر وبالطبع فإن التباين يكون ثابت هنا..

هذا، ومن الممكن القيام بقسمة قيمة الباقى على الإنحراف المعيارى فنحصل على البواقى المعيارية، فإذا قمنا بقسمة الباقى ei على الخطأ المعيارى المقدار للإنحراف S(i) وذلك لكل مشاهدة مهملة ... فنحصل على ...

$$e_i^* = \frac{yi - \beta(i)x(i)}{Si(i)} \qquad (6-16)$$

DFBETAS.......

وهو مقياس يقوم بتقدير الاختلاف بين تقديرات المربعات الصغرى لمعلمة معينة، والمعلمة المقدرة فعلاً، مع مراعاة وجود مشاهدات مهملة، ولذا فإنه يهتم بقيمة معلمة معينة فى النموذج، وهذا يتطلب تحديد أى من المشاهدات لديها تأثير غير معتادة على القيمة المقدرة للمعلمة..

ويلاحظ كذلك انه مقياس محدد بالإنحراف المعيارى المحدد بالقيمة βI وبالنسبة لمتغيرين يلاحظ أن:-

$$DfBETAS = \frac{(\beta - \beta(i))}{Si\beta(i)}$$

وكقاعدة عامة غالبا ما تكون قيمة هذا المقدار أكبر من 1.96 من الناحية المطلقة حيث يتم ملاحظة تأثير كل قيمة مشاهدة على هذه النتيجة القيمية.

وعندما لا يوجد لدينا بيانات ناقصة عن الخطأ فإن القيمة المقدرة للمعلمة تكون أكثر دقة وبشكل عام يلاحظ أنه فى حالة وجود أحد المشاهدات المتطرفة يمكن التغلب عليه بزيادة حجم العينة طالما أننا لا نريد إسقاط هذه المشاهدة، وبالطبع فإن زيادة العينة سوف يجعل تأثير هذه القيمة المتطرفة على النموذج تأثير ضعيف.

مختبرات التوصيف "التعيين" Specification Tests

رأينا حالاً مدى أهمية ملاحظة خطأ التوصيف فى الإقتصاد القياسى حيث أن سقوط أحد المتغيرات من النموذج سوف يؤدى إلى تحيز وعدم اتساق المربعات الصغرى .. فمن الأهمية أن نحاول إجراء نوع من البحث ل تحديد

ما إذا كان اختيار نموذج معين يتضمن أخطاء معينة أم لا، وسوف يتم مناقشة العديد منه الاختبارات المستخدمة لتحديد الأخطاء.

والآن سوف نتعرض للإختبارات التى تتضمن المتغيرات المهملة هى تلك التى يتم تطبيقها على نموذج الإنحدار الخطى، وبالتالى فإننا سوف نقوم بإجراء اختبار لقياس الخطأ، ويمكن لنا إستخدامه عندما يكون الخطأ غير مرتبط بآخر أو بعدد من المتغيرات المستقلة أو عندما يسقط أحد فروض النموذج الأساسية.

5/5 – تنقية النموذج

يمكن تنقية نموذج الإنحدار من خلال أهمال بعض المتغيرات التى قد يكون لها تأثير غير مرغوب مع تقدير المعلمات فى النموذج، رغم عدم أهميتها فى التفسير، كذلك سوف نقدم فى هذا الجزء، اختبار مدى إمكانية إهمال بعض المتغيرات فى نموذج الإنحدار الخطى:

إفترض وجود النموذج التالى:

$$Yi = \beta_i x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \mu i$$

وإن المتغير x1 غير مرتبط بالمتغيرين الآخرين x2، x3 فإنه يمكن استخدام إختبار (F) لمعرفة ما إذا كان هذا الأمر صحيحا أم لا، فاختبار (F) يقدم لنا فرض العدم الذى يعنى أن $\beta_2=\beta_3=0$ فى مقابل الفرض البديل الذى يعنى أن كل منها غير مساوى للصفر أو أنهما غير متساويان.

ويلاحظ أن هناك اختبار آخر يمكن استخدامه هنا وهو اختبار (t) الذى يستخدم بالنسبة لمعلمة معينة فيمكن استخدامه بعد تقدير معادلة الإنحدار.

وبشكل عام يمكن القول أن استخدام اختبار (F) سوف يكون مرتبطا إلى حد كبير بحجم العينة كى نضمن عدم تغير طبيعة الخطأ العشوائى.

اختبار وجود أو غياب خطأ القياس

افترض وجود نموذج إنحدار بسيط كالآتى:

$$Yi=\beta xi+\mu i$$

وأننا نريد قياس قيمة xi مع وجود خطأ فى هذه القيمة فلو كانت $xi=Xi^* -Vi$ فإن علاقة إنحدار المربعات الصغرى سوف تكون $yi=\beta xi^*+\mu i^*$ حيث أن $\mu i = \mu i - \beta Vi$ فلو تم قياس مع وجود خطأ بها فإنه يمكن إيجاد معادلة الإنحدار الحقيقية أى تقديرها بالطريقة التى تسمع بوجود هذا الخطأ، وبعبارة أخرى يمكن القول أننا نستطيع تقدير المعلمة β وذلك عن طريق افتراض المتغير z المرتبط بالمتغير X مع عدم إرتباطه بالمتغير μ ,v وتكون العلاقة بين X, Z معطاة كالآتى:

$$Xi^* = YZi + wi$$

وعندما يتم استخدام المربعات الصغرى فإن هذه العلاقة كالاتى

$$\hat{x}i^* = yzi + \hat{w}i$$

$$\hat{x}i^* = \hat{x}i^* + \hat{w}i$$

حيث أن $\hat{w}$ تشير إلى باقى الإنحدار فمن المعادلة

$$yi = \beta x\dot{i} + \mu\dot{i}$$

والمعادلة

$$x\dot{i} = \hat{x}\dot{i} + \hat{w}i$$

ينتج

$$Yi = \beta \hat{\dot{x}} i + \beta \hat{\dot{x}} i + \dot{\mu} \dot{i}$$

وهنا نلاحظ أن معامل $\hat{x}i^*$ يكون ثابت حيث يتم تقديره بأسلوب المربعات الصغرى، وبالتالى فإن وجود قياس الخطأ هنا أو إنعدامه لا يؤثر على النموذج طالما أن:

$$P\lim[\sum \hat{w}\hat{\mu}\dot{i}/n) = P\lim(\hat{Y}\sum Zi(\mu i + Vi)/N] = 0$$

وفى الواقع يلاحظ أن تقديرات المربعات الصغرى لمعامل x_i^* فى المعادلة السابقة $[Yi = \beta \hat{x} i + \beta wi + \mu \dot{i}]$ يكون مطابقا لتقديرات المتغيرات المساعدة المعطاة فى المعادلة $\hat{\beta} = \sum YiZi / XiZi^*$ وبالنظر إلى معامل المتغير يمكن ملاحظة الآتى:-

$$= P\lim[\sum \hat{w}\hat{\mu}\dot{i}/n)$$

$$= P\lim[\sum \hat{x}i^* - yzi)(\mu i - \beta Vi)/N]$$

$$= P\lim - (-\beta \sum X * iVi/N)$$

$$= P\lim(-\beta \sum Vi(xi + Vi)/N] = -\beta\sigma_v^2$$

وعندما لا يوجد أى خطأ فى القياس فإن $\sigma_v^2 = 0$، ومن ثم فإن المربعات سوف تكون متسقة التقديرات فى هذه الحالة خاصة بالنسبة للمعامل $\hat{wi}$ لأنه إذا كان خطأ القياس موجوداً فإن المعامل $\hat{wi}$ لن يكون متسق التقدير.

وبالإضافة لذلك فإنه يمكن التوصل إلى مقياس اختيار أكثر سهولة لتعيين أو اختبار خطأ القياس دعنا نفترض الرمز S ، وهو يعبر عن معامل المتغير $\hat{wi}$ فى المعادلة

$$Yi = \beta x\dot{i} = \hat{x}\dot{i} \pm \hat{w}i + \mu^*i$$

وبإحلال

$$\hat{x}\dot{i} = \hat{x}\dot{i} \pm \hat{w}i$$

نحصل على

$$yi = \beta \hat{x}i + (S - \beta)\hat{w}i + \mu i$$

ومنها نلاحظ أنه مع عدم وجود خطأ القياس فإن S=β وبالطبع $\hat{wi}$ يساوى الصفر، وعلى أى حال عندما لا تتساوى S مع β أى S≠β فإنه يمكن اختبار خطأ القياس ويتم ذلك على خطوتين:-

الأولى: يوجد إنحدار *X على Z لإيجاد الباقى $\hat{wi}$ ثم يلى ذلك فى الخطوة الثانية: إيجاد إنحدار y على $\dot{x}$ ، $\hat{w}$، ثم نقوم بإستخدام الاختبار (t) معامل المتغير $(\hat{w})$.

ونقوم بإستخدام اختبار (F) فى الحالة التى يوجد لدينا أكثر من متغير فى النموذج، ويمكن تناول المثال الآتى لتوضيح ما سبق.

مثال تطبيقى: اختبار قياس الخطأ فى نموذج الإنفاق العام

.. إن الإنفاق فى الدولة يتحدد من خلال قناتين أساسيتين وهما، الإنفاق من جانب الدولة والإنفاق من جانب الولايات أى الحكومات المحلية ويمكن أن نرمز إليه بالرمز (Exp). ولكن ما هى العوامل المحددة والمؤثرة على قيمة هذا الإنفاق أو الاختلاف فى مستوياته...هنا نفترض ما يعرف بالمساعدات الفيدرالية AID، دخل الولايات INC، عدد السكان للولايات pop كعوامل محددة لهذا الإنفاق ... ونقوم ببناء نموذج يجمع هذه المتغيرات معا كمتغيرات مستقلة. تفرز تأثيرها على المتغير التابع وهو الإنفاق العام ويتم استخدام طريقة المربعات الصغرى، فى وجود بيانات عن 50 ولاية أمريكية ولقد كانت النتيجة لبناء هذا النموذج هى كما يلى مع مراعاة أننا ذكرنا قيمة إختبارات (t) بين قوسين أسفل المتغيرات مباشرة فى النموذج.

$$EXP = -46.81 + 3.24\,AID + 0.00019INC - 0.59POP$$

$$(-0.56) \quad (13.64) \quad (8.12) \quad (-5.71)$$

$$R^2 = 0.993 \qquad F=2.190$$

ويلاحظ أنه طالما كان برنامج المساعدات AID يتضمن دفع مبالغ نقدية ثابتة فإن هذا قد يكون مصدرا هاماً للخطأ فى المتغير Aid فالنقود تستطيع أن تحدد لنا القيمة المطلوبة لهذا البرنامج حتى قبل وضع الميزانيات على مستوى الدولة أو المحليات.

فإذا كانت هذه البرامج وأمثالها هى برامج مفتوحة الأهداف، اى قد تكون مبالغة فى أهدافها Open-ended فإن ذلك يجعل القيم النقدية لها غير واقعية وتختلف مع القيمة الحقيقية أو المبالغ المحققة التى يمكن تقديمها من جانب الدولة أو المحليات، ونتيجة لذلك فإن المتغيرة AID يمكن أن يكون تابعا لخطأ القياس الفعلى.

وفى الحقيقة فإنه يمكن اختبار وجود خطأ القياس هذا ... بإستخدام اختبار يعرف بإسم إختبار هوسمان Housman Test ولكى نقوم بذلك نستخدم البيانات الخاصة بطلبة المدارس الابتدائية والثانوية كمتغيرات للدالة على عدد السكان Pop ونرمز لها بالرمز Ps حيث أن الإنفاق المدرسى هو أكبر جزء أساسى فى الإنفاق الحكومى والمحلى.

وعملية الإختبار تتم على مرحلتين ... فى المرحلة الأولى نجد أن AID يرجع التأثير فيها إلى قيمة Ps وكذلك المتغير الباقى $\hat{w}$ الذى يكون محسوب القيمة.

وفى الخطوة الثانية نضيف $\hat{wi}$ إلى نموذج الإنحدار الأصلى لتصحيح قيمة خطأ القياس، والمعادلة الناتجة تكون

$$\hat{EXP} = -138.51 + 1.74AID + 0.0018INC - 0.275POP + 1.372\hat{wi}$$
$$(-1.41) \quad (1.94) \quad (7.55) \quad (-1.29) \quad (1.73)$$

وهنا يمكن القول أنه يتم رفض فرض العدم الذى مقتضاه عدم وجود خطأ القياس. فى إختبار (T) ذو الطرفين وذلك عند مستوى معنوية 5% طالما أن 1.73<1.96 وبشكل عام يعتبر خطأ القياس شديد الأهمية أيضا لو كنا نستخدم إختبار ذو طرف واحد عند مستوى معنوية <10%

وملاحظة أخيرة يمكن قولها فى هذا الموضوع وهى... أنه فى حالة تصحيح خطأ القياس لأى نموذج فإنه سوف يؤدى إلى التقليل من قيمة المعامل الخاص بالمتغيرات الذى كان به الخطأ ... وفى حالتنا هنا سوف تنخفض قيمة معامل المتغير Aid.

حيث أن خطأ القياس هو السبب الرئيسى فى التأثير على قيمة AID فى الإنفاق العام عندما يجعلها تظهر بقيمة مبالغ فيها Over stated.

تم بحمد الله،

قائمة المراجع

أولا- المراجع العربية:

١- د. إسماعيل سليمان العوامرى" الإحصاء الاقتصادي و التجاري " مكتبة التجارة و التعاون ؛ القاهرة .

٢- د. جلال مصطفى الصياد "الاستدلال الإحصائي " دار المريخ ؛ السعودية ؛ الرياض .

٣- د. عادل عبد الغنى محبوب " الاقتصاد القياسي " وزارة التعليم العالي ؛ العراق .

٤- د. عبد الرحمن حامد , د. بوعلام بن حيلالى " التحليل الإحصائي للمتغيرات المتعددة من الوجهة التطبيقية " دار المريخ ؛ السعودية ؛ الرياض .

٥- د. عمر عبد الجود عبد العزيز , د. عبد الحفيظ بلعربى " مقدمة في الطرق الإحصائية مع تطبيقات تجارية " دار زاهران للنشر والتوزيع ؛ الأردن .

٦- د. محمد عبد السميع " نظرية الاقتصاد القياسي " كلية التجارة - جامعة الزقازيق . الزقازيق .

٧- د.هناء خير الدين " الاقتصاد القياسي " دار الشعب ؛ القاهرة .

ثانيا- المراجع الأجنبية :

J. Johnston " Econometric Methods " New York . McGraw-Hill book Company 1980

As goldbreger " Econometric Theroy " New York John Wiley and Sons 1964

H theil "Principles of Econometrics "Amsterdam North Holland publishing Company 1979

M D Intriligator "Econometrics Techniques and Application" Amsterdam North Holland publushing Company 1978

J L Munphy Inttroductory "Econometrics "Richard D Irwin Inc howe Wood 1973

A A Walters "An Introduction to Econometrics" london Macnill an 1970

D Gajarali " Basic Econometrics "Tokyo Megraw Hill Book Company 1978

R Carter Hill William E Griffiths and Geory G .Judge "Undergradute Econometrics " JohnWiley&Song,Inc.New York.